Capítulo 1

El Conjunto de los números Reales

Contenido

1.1 El conjunto de los números Naturales

Definición 1

El conjunto cuyos elementos son $0, 1, 2, 3, 4, ...$ recibe el nombre de conjunto de los números naturales y se denota con el símbolo $\mathbb{N}$, así:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Nótese que este conjunto tiene un primer elemento, a saber, el cero, pero no existe un último elemento.
Por esta razón diremos que el conjunto de los números naturales es infinito.

1.2 El conjunto de los números Enteros

Definición 2

El conjunto cuyos elementos son $..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...$ recibe el nombre de conjunto de los números enteros y se denota con el símbolo $\mathbb{Z}$, así:

$$\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$$

Nótese que:

1.) El conjunto de los números enteros no tiene un primer elemento ni un último elemento, por lo que decimos que es infinito.

2.) Los números naturales $0, 1, 2, 3, 4, ...$ pertenecen al conjunto de los números enteros, de donde se tiene que el conjunto de los números naturales es subconjunto del conjunto de los números enteros, lo que se expresa simbólicamente así:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

1.3 El conjunto de los números Racionales y el conjunto de los números Irracionales

Notación: Sean $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$ tal que $b \neq 0$.

La expresión $a \div b$ denota el resultado de dividir a por b lo cual también se escribe $\dfrac{a}{b},$ es decir:

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

La expresión $\dfrac{a}{b}$ se lee "a sobre b"

Observación importante: La división por cero no está definida, es decir, la frase "a dividido por cero" no tiene sentido matemático en este contexto.

Definición 3

El conjunto cuyos elementos son los números que se pueden presentar como $\dfrac{a}{b}$, con $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$ recibe el nombre de conjunto de los números racionales y se denota con el símbolo $\mathbb{Q}$, así:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ / \ a \in \mathbb{Z}, \ b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

Observación: Recuerde que $\dfrac{a}{b}$ significa "a dividido por b" y como la división por cero no está definida, la frase "a dividido por cero" no tiene sentido matemático en este contexto. Por esto es que en la definición anterior se pide que $b \neq 0$.

Ejemplo 1

$\dfrac{3}{5}, \dfrac{-1}{2}, \dfrac{0}{4}, \dfrac{12}{-10}, \dfrac{-9}{-2}, \dfrac{3}{1}$, y $\dfrac{5}{-1}$ representan números racionales.

Definición 4

Sean $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.

En la expresión $\dfrac{a}{b}$, "a" recibe el nombre de **numerador** y "b" recibe el nombre de **denominador**. Y la expresión $\dfrac{a}{b}$ recibe el nombre de **fracción**.

Consideremos los siguientes ejemplos ilustrativos:

1.) Como $3 \div 1 = 3$ entonces $\dfrac{3}{1} = 3$

2.) Como $-6 \div 1 = -6$ entonces $\dfrac{-6}{1} = -6$

3.) Como $-50 \div 1 = -50$ entonces $\dfrac{-50}{1} = -50$

4.) Sea $a \in \mathbb{Z}$. Como $a \div 1 = a$ entonces $\dfrac{a}{1} = a$

Los ejemplos $(1), (2), (3)$ son casos particulares del ejemplo (4), esto nos permite enunciar el siguiente resultado.

> **Todo número entero es un número racional**, es decir el conjunto de los números enteros es subconjunto del conjunto de los números racionales y escribimos:

$$\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Expansión decimal de un número racional

Sea $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$.

Si para un número representado como $\dfrac{a}{b}$ se realiza la división de a por b, se obtiene otra representación para dicho número la cual recibe el nombre de **expansión decimal**.

Ejemplo 2

Determine la expansión decimal de $\dfrac{5}{4}$

Solución

Dividimos 5 por 4

$$\begin{array}{r|l}
5 & \underline{\;4\;\;\;\;} \\
\underline{-4} & 1.25 \\
10 & \\
\underline{-8} & \\
20 & \\
\underline{20} & \\
0 &
\end{array}$$

La expansión decimal de $\dfrac{5}{4}$ es 1.25
es decir, $\dfrac{5}{4} = 1.25$

Ejemplo 3

Determine la expansión decimal de $\dfrac{-3}{8}$

Solución

Dividimos 3 por 8

$$\begin{array}{r|l}
3 & \underline{\;8\;\;\;\;\;} \\
\underline{-0} & 0.375 \\
30 & \\
\underline{-24} & \\
60 & \\
\underline{-56} & \\
40 & \\
\underline{40} & \\
0 &
\end{array}$$

La expansión decimal de $\dfrac{-3}{8}$ es -0.375
es decir, $\dfrac{-3}{8} = -0.375$

Observemos que en los dos ejemplos anteriores el residuo (final) que se obtiene después de varias divisiones es cero (0), por lo que decimos que 1.25 y 0.375 son expansiones decimales **periódicas finitas** o simplemente expansiones decimales finitas.

■ Definición 5

Sea $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$

Si al dividir a por b se obtiene como residuo final cero, se dice que $\dfrac{a}{b}$ tiene una expansión decimal finita.

Analicemos los siguientes ejemplos donde al dividir el numerador por el denominador no es posible obtener un residuo final igual a cero.

■ Ejemplo 4

Determine la expansión decimal de:

a.) $\dfrac{2}{11}$ b.) $\dfrac{-7}{6}$

Solución

a.) $\dfrac{2}{11}$

$$
\begin{array}{lr|l}
 & 2 & 11 \\ \cline{3-3}
 & \underline{-0} & 0.1818... \\
 & \longrightarrow 20 & \\
\text{Residuo} & \underline{-11} & \\
\text{que} & 90 & \\
\text{se} & \underline{-88} & \\
\text{repite} & \longrightarrow 20 & \\
 & \underline{-11} & \\
 & 90 & \\
 & \underline{-88} & \\
 & \longrightarrow 2 &
\end{array}
$$

Por lo que $\dfrac{2}{11} = 0.1818...$, donde los tres puntos significan que el término 18 se repite indefinidamente y en ese caso escribimos: $\dfrac{2}{11} = 0.\overline{18}$ (la barra horizontal sobre 18 indica que 18 se repite indefinidamente)

b.) $\dfrac{-7}{6}$

$$\begin{array}{lrr|l}
 & & 7 & 6 \\ \cline{4-4}
 & & \underline{-6} & 1.1666... \\
 & & 10 & \\
 & & \underline{-6} & \\
 & \longrightarrow & 40 & \\
 & & \underline{-36} & \\
\text{Residuo} & \longrightarrow & 40 & \\
\text{que} & & \underline{-36} & \\
\text{se} & \longrightarrow & 40 & \\
\text{repite} & & \underline{-36} & \\
 & \longrightarrow & 40 & \\
 & & \underline{-36} & \\
 & \longrightarrow & 4 &
\end{array}$$

Por lo que $\dfrac{-7}{6} = -1.1666...$, donde los tres puntos significan que el dígito 6 se repite indefinidamente y escribimos: $\dfrac{-7}{6} = -1.1\,\overline{6}$ (observemos que solo el 6 se repite)

Note que en el ejemplo 3, al obtener las expansiones decimales de los números dados no se llega a un residuo final cero, pero a partir de cierto momento, los residuos se repiten, lo que a su vez implica que un dígito - o un grupo de dígitos - del cociente, se repiten (en el ejemplo 3 se repiten 18 y 6 respectivamente) por lo que decimos que $0.\overline{18}$ y $-1.1\overline{6}$ son expansiones decimales periódicas **infinitas**.

■ **Definición 6**

Sea $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ tal que $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$.

Si al dividir a por b no es posible obtener como residuo final cero, se dice $\dfrac{a}{b}$ tiene una expansión **decimal periódica infinita**.

Los resultados obtenidos en los ejemplos $(1), (2), (3)$ son casos especiales del siguiente hecho.

Todo número racional se puede representar por una expansión decimal periódica finita o por una expansión decimal infinita periódica (o simplemente por una expansión decimal periódica).

Ejercicios 1

Para cada uno de los números siguientes determine su expansión decimal e indique si ésta es finita o periódica infinita.

a.) $\dfrac{-17}{3}$ *b.)* $\dfrac{1}{20}$ *c.)* $\dfrac{-3}{7}$ *d.)* $\dfrac{13}{6}$ *e.)* $\dfrac{421}{100}$

De lo anterior ya sabemos que todo número racional se puede expresar por medio de una expansión decimal periódica (finita o infinita).

Pero, ¿es cierto lo inverso?, o sea ¿toda expansión decimal periódica (finita o infinita) representa un número racional?
Antes de dar una respuesta a estas preguntas analicemos los siguientes ejemplos.

■ **Ejemplo 5**

Determine si $0.\overline{23}$ representa un número racional.

Solución

Sean $n = 0.\overline{23}$ entonces $n = 0.232323...$
$n = 0.23\overline{23}$

como se repiten los dígitos multiplicamos por 100 a ambos miembros de la igualdad.

$100\,n = 100(0.23\overline{23})$, realizando la operación

$100\,n = 23.\overline{23}$

Tomemos $100\,n = 23.\overline{23}$ y $n = 0.\overline{23}$, y restemos término a término

$99\,n = 23$

por lo que:

$n = \dfrac{23}{99}$

Por lo tanto $0.\overline{23}$ representa un número racional y $0.\overline{23} = \dfrac{23}{99}$

■ **Ejemplo 6**

Determine si -0.456 representa un número racional.

Solución

Observe que en este caso la expansión decimal es finita.

Sea $n = -0.456$

Multiplicando por 1000 a ambos miembros de la igualdad se tiene.

$1000\,n = -465$

por lo que:

$n = \dfrac{-456}{1000}$

Por lo tanto -0.456 representa a un número racional y $-0.456 = \dfrac{-456}{1000}$

Ejemplo 7

Determine si $4.53\overline{1}$ representa un número racional.

Solución

Sea $n = 4.53\overline{1}$

Multipliquemos por 100 a ambos miembros de la igualdad

$100\,n = 453.\overline{1}$

Multipliquemos por 10 a ambos miembros de la igualdad

$1000\,n = 4521.\overline{1}$

Tomemos $1000\,n = 4521.\overline{1}$ y $100\,n = 453.\overline{1}$ y restemos término a término

$1000\,n = 4531.\overline{1}$

$-100\,n = -453.\overline{1}$

$900\,n = 4078$ por lo que

$n = \dfrac{4078}{900}$

Por lo tanto $4.53\overline{1}$ representa un número racional y $4.53\overline{1} = \dfrac{4078}{900}$

Los ejemplos $(4), (5)$ y (6) son casos particulares del siguiente resultado:

Todo número con decimal periódica (finita o infinita)
representa un número racional

Ejercicios 2

Determine el número racional que representa cada una de las siguientes expansiones decimales:

a.) $4,\overline{12}$ *b.*) $0,\overline{325}$ *c.*) $-1,6\overline{2}$ *d.*) $1,3\overline{45}$ *e.*) $-2,505$

1.4 El conjunto de los números Irracionales

Dados los resultados anteriores tenemos que todo número que se representa por una expansión decimal periódica (finita o infinita) es un número racional, pero cabe hacerse dos preguntas:

¿Existen expansiones decimales que no sean períodicas?, y si existen, ¿qué números representan?

Para contestar la primera pregunta consideremos las siguientes expansiones decimales:

a.) 0.20 200 2000 20000 200000 2...

b.) 5.7822 3222 42222 5222222 6...

Observe que en las dos expansiones decimales anteriores, éstas no son periódicas y por los resultados anteriores estas expansiones no representan números racionales.

Las expansiones decimales (a) y (b) anteriores reciben el nombre de **expansiones decimales infinitas no periódicas**.

Para contestar la segunda pregunta tenemos:

■ **Definición 7**

Los números que se pueden representar por expansiones decimales infinitas no períodicas reciben el nombre de **números irracionales**.

El conjunto cuyos elementos son los números irracionales, recibe el nombre de conjunto de los números irracionales y se denota con el símbolo $\mathbb{I}$.

Observación: Por la definición de número racional y la de número irracional se tiene que **no existen números que sean racionales e irracionales a la vez**, simbólicamente esto se indica de la siguiente manera:

$$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$$

1.5 El conjunto de los números Reales

■ **Definición 8**

La unión del conjunto de los números racionales con el conjunto de los números irracionales, recibe el nombre de conjunto de los números reales y se denota con el símbolo $\mathbb{R}$, simbólicamente escribimos:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

1.5.1 Operaciones definidas en el conjunto de los números reales

En el conjunto de los números reales están definidas dos operaciones, que llamaremos **adición** y **multiplicación**.

Decir que la adición y la multiplicación son operaciones definidas en el conjunto de los números reales significa que si dos números reales se relacionan mediante alguna de estas dos operaciones el resultado es un número real.

Propiedades de adición en el conjunto de los números reales

A_1 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$ entonces $a + b = b + a$ (la adicción es conmutativa)

Por ejemplo: $5 + 3 = 3 + 5$

A_2 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$ entonces $a + (b + c) = (a + b) + c$ (la adición es asociativa)

Por ejemplo: $7 + (6 + 2) = (7 + 6) + 2$

A_3 Existe 0, $0 \in \mathbb{R}$ tal que para todo a, $a \in \mathbb{R}$, $a + 0 = 0 + a = a$ (0 es el elemento neutro aditivo)

Por ejemplo: $\dfrac{-3}{5} + 0 = \dfrac{-3}{5}$

A_4 Para todo a, $a \in \mathbb{R}$ existe $-a$, $-a \in \mathbb{R}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (cada número real posee inverso aditivo)

Por ejemplo: el inverso aditivo de -8 es 8 pues $-8 + 8 = 0$

Propiedades de la multiplicación en el conjunto de los números reales

M_1 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$ entonces $a \cdot b = b \cdot a$ (la multiplicación es conmutativa)

Por ejemplo: $3 \cdot 2 = 2 \cdot 3$

M_2 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$ entonces $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ (la multiplicación es asociativa)

Por ejemplo: $-5 \cdot (2 \cdot 1) = (-5 \cdot 2) \cdot 1$

M_3 Existe 1; $1 \in \mathbb{R}$ tal que para todo a, $a \in \mathbb{R}$, $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (1 es el elemento neutro multiplicativo)

Por ejemplo: $4 \cdot 1 = 4$

M_4 Para todo a, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe a^{-1}, $a^{-1} \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (cada número real diferente de 0 posee inverso multiplicativo).

Con $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$

Por ejemplo: $15 \cdot \dfrac{1}{15} = 1$

Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, entonces se cumple que:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Por ejemplo: $-11 \cdot (3 + 9) = (-11) \cdot 3 + (-11) \cdot 9$

La sustracción definida en el conjunto de los números reales

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

Llamaremos sustracción de a y b, y denotaremos $a - b$ a la operación definida por:

$$a - b = a + (-b)$$

Por ejemplo:

a.) $5 - 3 = 5 + (-3)$

b.) $\dfrac{5}{4} - \dfrac{1}{7} = \dfrac{5}{4} + \dfrac{-1}{7}$

La división definida en el conjunto de los números reales

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$.

Se define la división de a por b y se denota $a \div b$ a la operación definida por:

$$a \div b = a \cdot \frac{1}{b}$$

Como se dijo anteriormente $a \div b$ se denota como $\dfrac{a}{b}$ es decir:

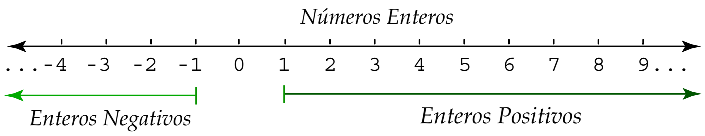
$$a \div b = \frac{a}{b}$$

Observación: Recuerde que si $\frac{a}{b}$ representa un número real entonces b tiene que ser diferente de cero, pues la división por cero no está definida matemáticamente.

1.5.2 Orden en el conjunto de los números reales

Representación de los números reales

Es posible establecer una correspondencia entre los números reales y los puntos de una recta (recta numérica) de la siguiente manera: dada una recta, se selecciona un punto arbitrario de ésta para representar el cero (0) y otro punto a la derecha del cero para representar el uno (1). Luego dividimos toda la recta en segmentos que tengan la misma longitud que el segmento de cero a uno, para así representar los números enteros, los números $1, 2, 3, 4, ...$ (en este orden) a la derecha del cero y los números $-3, -2, -1, ...$ (en este orden) a la izquierda del cero.



Los restantes números reales se representan en esta recta, usando su expansión decimal tal como se muestra en el ejemplo 8.

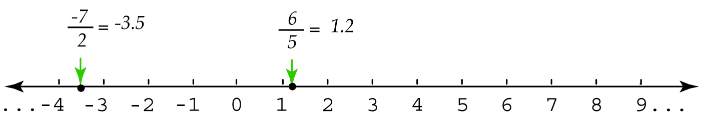
Ejemplo 8

Represente en la recta numérica los números $\frac{6}{5}$ y $\frac{-7}{2}$

Solución

$\frac{6}{5} = 1.2 \qquad \text{y} \qquad \frac{-7}{2} = -3.5$

Usando estos resultados, podemos representar en la recta numérica $\frac{6}{5}$ y $\frac{-7}{2}$ de la siguiente manera.



Definición 9

En una recta numérica el punto que representa el cero recibe el nombre de **origen**.

Definición 10

1.) Los números reales que se representan a la derecha del origen se llaman **números reales positivos**.

2.) Los números reales que se representan a la izquierda del origen se llaman **números reales negativos**.

La relación “menor que” en el conjunto de los números reales

En el conjunto de los números reales se define una relación, llamada “menor que”, de la siguiente manera.

■ **Definición 11**

Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$. Se dice que a es menor que b, y se escribe $a < b$, si $a - b$ es un número negativo.

Por ejemplo:

a.) $2 < 3$ pues $2 - 3 = -1$ y -1 es negativo

b.) $-3 < 1$ pues $-3 - 1 = -4$ y -4 es negativo

c.) $-5 < -2$ pues $-5 - (-2) = -3$ y -3 es negativo

d.) $-6 < 0$ pues $-6 - 0 = -6$ y -6 es negativo

De la definición de la relación “menor que” se tiene que todo número negativo es menor que cero (ver ejemplo d)

La relación “mayor que” en el conjunto de los números reales

■ **Definición 12**

Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$, se dice que a es mayor que b, y se escribe $a > b$, si $a - b$ es un número positivo.

Por ejemplo:

a.) $5 > 2$ pues $5 - 2 = 3$ y 3 es positivo

b.) $3 > -1$ pues $3 - (-1) = 4$ y 4 es positivo

c.) $-2 > -4$ pues $-2 - (-4) = 2$ y 2 es positivo

d.) $7 > 0$ pues $7 - 0 = 7$ y 7 es positivo

De la definición de la relación “mayor que” se tiene que todo número positivo es mayor que cero (ver ejemplo d)

Algunas propiedades de la relación “menor que”

O_1 Si $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$ entonces se cumple una y sólo una de las siguientes condiciones: $a < b,\ b < a,\ a = b$

O_2 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$. Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$

O_3 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$. Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $0 < a \cdot b$

O_4 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$. Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $0 < a \cdot b$

O_5 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$. Si $a < 0$ y $0 < b$ entonces $a \cdot b < 0$

O_6 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$. Si $0 < a$ y $b < 0$ entonces $a \cdot b < 0$

O_7 Sea $a \in \mathbb{R}$. Si $a < 0$ entonces $0 < -a$

O_8 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$. Si $a < b$ entonces $-b < -a$

O_9 Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$. Si $0 < \dfrac{a}{b}$ entonces $0 < a \cdot b$

O_{10} Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ b \neq 0$. Si $\dfrac{a}{b} < 0$ entonces $a \cdot b < 0$

O_{11} Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}$. Si $a < b$ entonces $a + c < b + c$

O_{12} Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ c > 0$. Si $a < b$ entonces $a \cdot c < b \cdot c$

O_{13} Sean $a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R},\ c < 0$. Si $a < b$ entonces $b \cdot c < a \cdot c$

Observación:

1.) Si en cada una de las propiedades anteriores se sustituye el símbolo “$<$” por el símbolo “$>$”; las propiedades que se obtienen son ciertas (y corresponden a la relación “mayor que”)

2.) Si a y b son números reales: decir que “a es menor que b” es equivalente a decir que “b es mayor que a”.

Simbólicamente se escribe:

$$\text{Sean } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R}$$

$$a < b \Leftrightarrow b > a$$

Por ejemplo:

a.) $2 < 3$ es equivalente a $3 > 2$

b.) $-1 > -5$ es equivalente a $-5 < -1$

c.) $-2 < 0$ es equivalente a $0 > -2$

Notación: Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. La expresión "$a < b$ ó $a = b$" usualmente se escribe $a \leq b$.

La expresión "$a \leq b$" se lee "a" es menor o igual que "b".

Observación:

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Para que "$a \leq b$" sea verdadera basta con que se cumpla una y sólo una de las siguientes condiciones:

1.) $a < b$;

2.) $a = b$

Ejemplo 9

a.) $4 \leq 6$ es verdadera pues $4 < 6$

b.) $2 \leq 2$ es verdadera pues $2 = 2$

c.) $5 \leq 3$ es falsa pues no se cumple $5 < 3$ ni $5 = 3$

Notación: Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. La expresión "$a > b$ o $a = b$" usualmente se escribe $a \geq b$.

La expresión "$a \geq b$" se lee "a" es mayor o igual que "b".

Observación: Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. Para que "$a \geq b$" sea verdadera basta con que se cumpla una y sólo una de las siguientes condiciones:

1.) $a > b$;

2.) $a = b$

Ejemplo 10

a.) $3 \geq -2$ es verdadera pues $3 > -2$

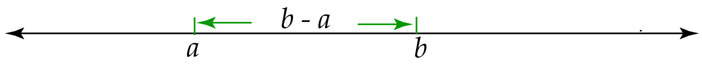
b.) $-2 \geq 0$ es falsa pues no se cumple que $-2 > 0$ ni $-2 = 0$

c.) $6 \geq 6$ es verdadera pues $6 = 6$

Valor absoluto en el conjunto de los números reales

Definición 13

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y supongamos que $a \leq b$; se llama distancia entre a y b, al número no negativo $b - a$.



Notemos que la distancia entre dos números reales diferentes entre sí es un número positivo, pues el menor se resta del mayor.

Véanse los siguientes ejemplos:

1.) La distancia entre 1 y 4 es 3, pues $4 - 1 = 3$

2.) La distancia entre 2 y -3 es 5, pues $2 - (-3) = 5$

3.) La distancia entre -7 y -3 es 4, pues $-3 - (-7) = 4$

Ejercicios 3

Para cada uno de los casos siguientes determine la distancia entre los números a y b si:

1.) $a = 2;\ b = 9$

2.) $a = -3;\ b = 5$

3.) $a = 0;\ b = 6$

4.) $a = 2;\ b = -7$

5.) $a = -1;\ b = -9$

6.) $a = -4;\ b = 0$

Supongamos que se desea calcular la distancia entre 0 y un número real x cualquiera. A esta distancia la denotaremos por $|\ x\ |$ y se llama **valor absoluto de x**.

Así: $|\ x\ |$ indica la distancia entre x y 0

Ejemplo 11

a.) $\mid 3 \mid = 3 - 0 = 3$ es decir $\mid 3 \mid = 3$

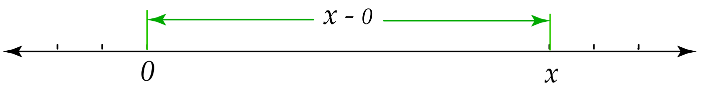
b.) $\mid 0 \mid = 0 - 0 = 0$ es decir $\mid 0 \mid = 0$

c.) $\mid -5 \mid = 0 - (-5) = 5$ es decir $\mid -5 \mid = 5$

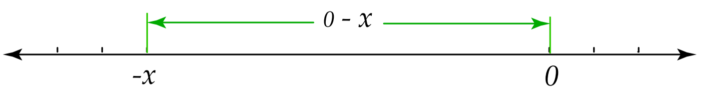
d.) $\mid 5 \mid = 5 - 0 = 5$ es decir $\mid 5 \mid = 5$

En general, sea $x \in \mathbb{R}$

1.) Si $x > 0$; tenemos $\mid x \mid = x - 0 = x$, es decir si $x > 0$ entonces $\mid x \mid = x$



2.) Si $x < 0$; tenemos $\mid x \mid = 0 - x = -x$, es decir si $x < 0$ entonces $\mid x \mid = -x$



3.) Si $x = 0$; tenemos $\mid x \mid = 0 - 0 = 0$, es decir $\mid 0 \mid = 0$

Así tenemos la siguiente definición

Definición 14

Para cada número real x, definimos su valor absoluto, y lo representamos por $\mid x \mid$ de la manera siguiente:

a.) $\mid x \mid = x$ si $x \geq 0$ ó

b.) $\mid x \mid = -x$ si $x < 0$

Ejercicios 4

Usando la definición de valor absoluto, calcule:

a.) $\mid 11 \mid$

b.) $\mid 21 \mid$

c.) $\mid -13 \mid$

d.) $\mid -109 \mid$

e.) $\mid 0 \mid$

f.) $\mid -115 \mid$

1.6 Aritmética en el Conjunto de los Números Reales

Introducción

Los temas presentados anteriormente nos dan una visión acerca del conjunto de los números reales, las operaciones que en este conjunto se definen y las propiedades que éstas poseen.

Nuestro objetivo en esta sección es lograr que el estudiante adquiera destrezas en la realización de las operaciones básicas en el conjunto de los números reales (adición, sustracción, multiplicación y división). Para esto enunciamos algunas propiedades en el conjunto de los números naturales, enteros, racionales y en general en el conjunto de los números reales, así como los algoritmos que se utilizan para realizar dichas operaciones.

Queremos enfatizar la importancia de los temas que en esta sección se desarrollan, pues ellos constituyen una base fundamental para un buen desempeño y así obtener una mejor comprensión por parte de los estudiantes de los temas que estudiaremos en el capítulo siguiente.

1.7 Propiedades de los números enteros

1.7.1 Operaciones definidas en el conjunto de los números enteros

Nota:

1.) Si $a \in \mathbb{Z}$ y $a > 0$ entonces decimos que a tiene signo positivo $(+)$

2.) Si $a \in \mathbb{Z}$ y $a < 0$ entonces decimos que a tiene signo negativo $(-)$

Generalmente al representar los números enteros positivos el signo $(+)$ se omite, no así para los números negativos los cuales al ser representados siempre debe indicárseles el signo $(-)$.

1.7.2 Adición de los números enteros

Caso 1: **Adición de números enteros de igual signo**

En este caso, se suman sus valores absolutos y al resultado se le hace corresponder el signo de ambos números.

■ **Ejemplo 12**

Determine el resultado que se obtiene al sumar -8 y -5

Solución

$\mid -8 \mid = 8$, $\mid -5 \mid = 5$; además el signo de -8 y -5 es negativo $(-)$ por lo que:

$-8 + -5 = -(8 + 5) = -13$ O sea, $-8 + -5 = -13$

Ejemplo 13

Determine el resultado que se obtiene al sumar -9 y -11

Solución

$\mid -9 \mid = 9$, $\mid -11 \mid = 11$; además el signo de -9 y -11 es negativo $(-)$ por lo que:

$-9 + -11 = -(9 + 11) = -20$ O sea, $-9 + -11 = -20$

Ejemplo 14

Determine el resultado que se obtiene al sumar 27 y 4

Solución

$\mid 27 \mid = 27$, $\mid 4 \mid = 4$; además el signo de 27 y 4 es positivo $(+)$ por lo que:

$27 + 4 = 31$

Los ejemplos (1), (2) y (3) son casos particulares del siguiente resultado:

Si $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$ entonces:

$$\begin{aligned} -a + -b &= -(a + b) \\ a + b &= +(a + b) \end{aligned}$$

Caso 2: **Adición de números enteros con distinto signo**

En este caso, el resultado viene dado por la diferencia de los valores absolutos de ambos números (el mayor menos el menor) a cuyo resultado se le hace corresponder el signo del número de mayor valor absoluto.

Ejemplo 15

Determine el resultado que se obtiene al sumar -8 y 9

Solución

$\mid -8 \mid = 8$, $\mid 9 \mid = 9$; de donde: $\mid 9 \mid > \mid -8 \mid$ y como 9 tiene signo positivo $(+)$ entonces:

$-8 + 9 = 9 - 8 = 1$ es decir, $-8 + 9 = 1$

Ejemplo 16

Determine el resultado que se obtiene al sumar 5 y -12

Solución

$\mid 5 \mid = 5, \ \mid -12 \mid = 12$; de donde: $\mid -12 \mid > \mid 5 \mid$ y como -12 tiene signo negativo $(-)$ entonces:

$5 + -12 = -(12 - 5) = -7$ es decir, $5 + -12 = -7$

■ **Ejemplo 17**

Determine el resultado que se obtiene al sumar -6 y 2

Solución

$\mid -6 \mid = 6, \ \mid 2 \mid = 2$; de donde: $\mid -6 \mid > \mid 2 \mid$ y como -6 tiene signo negativo $(-)$ entonces:

$-6 + 2 = -(6 - 2) = -4$ es decir, $-6 + 2 = -4$

Ejercicios 5

1.) Escriba en notación decimal el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

1.) $-14 + 72$
3.) $12 + (-12)$
2.) $-128 + (-29)$
4.) $-142 + 67$
5.) $27 + (-32)$
6.) $25 + 13$

2.) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Usando el hecho de que $a - b = a + (-b)$ escriba en notación decimal el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

1.) $-121 - 15$
2.) $-40 - 70$
3.) $-1 - 4$

1.7.3 Multiplicación de números enteros

Recordemos que para $a \in \mathbb{R}, \ b \in \mathbb{R}$ se tiene que :

1.) Si $0 < a$ y $0 < b$ entonces $0 < a \cdot b$

2.) Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $0 < a \cdot b$

3.) Si $a < 0$ y $0 < b$ entonces $a \cdot b < 0$

4.) Si $0 < a$ y $b < 0$ entonces $a \cdot b < 0$

Las propiedades (1) y (2) se pueden resumir diciendo:

Si a y b tienen igual signo entonces a $\cdot$ b es positivo

Por ejemplo

a.) $(-8) \cdot (-6) = 48$
b.) $(8) \cdot (-6) = -48$
c.) $(-8) \cdot 6 = -48$
d.) $12 \cdot 5 = 60$
e.) $(-7) \cdot (-9) = 63$
f.) $(-3)(-4)(-1) = -12$

Notación: Sea $a \in \mathbb{Z}$, entonces:

a.) $(-1)a = -a$

b.) $-(-a) = a$

Por ejemplo

a.) $(-1)5 = -5$
b.) $(-1)3 = -3$
c.) $-(-12) = 12$
d.) $-(-25) = 25$

Ejemplo 18

Escriba en notación decimal el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $8 - (-6)$

Solución

$$\begin{aligned} 8 - (-6) &= 8 + -(-6) \\ &= 8 + 6 \\ &= 14 \end{aligned}$$

$\therefore \; 8 - (-6) = 14$

b.) $-17 - (-13)$

Solución

$$\begin{aligned} -17-(-13) &= -17+-(-13) \\ &= -17+13 \\ &= -4 \end{aligned}$$

$\therefore \quad -17-(-13) = -4$

c.) $-(-4)-3$

Solución

$$\begin{aligned} -(-4)-3 &= 4-3 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\therefore \quad -(-4)-3 = 1$

Ejemplo 19

Escriba en notación decimal el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $6-(-5)-9$

Solución

$$\begin{aligned} 6-(-5)-9 &= 6+5-9 \\ &= 11-9 \\ &= 2 \end{aligned}$$

$\therefore \quad 6-(-5)-9 = 2$

b.) $-1-(-2)+30$

Solución

$$\begin{aligned} -1-(-2)+30 &= -1+2+30 \\ &= 1+30 \\ &= 31 \end{aligned}$$

$\therefore \quad -1-(-2)+30 = 31$

Ejercicios 6

Escriba en notación decimal el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $-16-(-8)$	d.) $-(-11)+5-2$	g.) $25-28+-(5)$
b.) $-(-9)+3$	e.) $-3-(-4)-(-3)$	h.) $2-(-1)+3$
c.) $-(-6)-(-1)$	f.) $2-13-6$	i.) $1-2-6+8$

1.7.4 Operaciones combinadas

Consideremos la expresión $2+3\cdot 5$

El resultado de realizar las operaciones puede ser 25 (si se realiza la suma primero y luego el producto) o bien 17 (si se realiza el producto primero y luego la suma). Sólo uno de los resultados debe ser válido.

Convenio 1

En una expresión que no involucre paréntesis y en la cual aparecen conjuntamente el producto y la suma (o resta) se entenderá que el producto ha de realizarse primero.

Lo anterior se expresa brevemente de la siguiente forma:

"La multiplicación tiene prioridad sobre la adición y la sustracción"

Por lo tanto tenemos que:

$$\begin{aligned} 2+3\cdot 5 &= 2+15 \\ &= 2+15 \\ &= 17 \end{aligned}$$

$\therefore\quad 2+3\cdot 5 = 17$

Consideremos el siguiente ejemplo:

$$\begin{aligned} 6-4\cdot 7 &= 6-28 \\ &= -22 \end{aligned}$$

$\therefore\quad 6-4\cdot 7 = -22$

■ **Ejemplo 20**

Determine el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $7 \cdot 2 - 13$

Solución

$$\begin{aligned} 7 \cdot 2 - 13 &= 14 - 13 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo que, $7 \cdot 2 - 13 = 1$

b.) $3 \cdot 2 - 5 \cdot 4 - 3$

Solución

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2 - 5 \cdot 4 - 3 &= 6 - 20 - 3 \\ &= -14 - 3 \\ &= -17 \end{aligned}$$

Por lo que, $3 \cdot 2 - 5 \cdot 4 - 3 = -17$

Ejercicios 7

Determine el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $-8 \cdot 7 + 12 \cdot 3 - 6$

b.) $11 + 6(-7) - 4 \cdot 3$

c.) $-8 \cdot (-4) - 5 \cdot (-3) - 10$

d.) $2 \cdot (3) + 5 - 3 \cdot 8$

Convenio 2

En una expresión que involucre paréntesis se deben realizar primero las operaciones indicadas dentro del paréntesis.

■ **Ejemplo 21**

Determine el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $-5 + 4 \cdot (2 - 7)$

Solución

$$\begin{aligned} -5+4\cdot(2-7) &= -5+4\cdot(-5) \\ &= -5+(-20) \\ &= -25 \end{aligned}$$

Por lo que, $\quad -5+4\cdot(2-7)=-25$

b.) $-2\cdot(-12)-3\cdot(5-6)+4$

Solución

$$\begin{aligned} -2\cdot(-12)-3\cdot(5-6)+4 &= 24-3(-1)+4 \\ &= 24+3+4 \\ &= 31 \end{aligned}$$

Por lo que, $\quad -2\cdot(-12)-3\cdot(5-6)+4=31$

Ejercicios 8

Determine el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $(-2-8)\cdot 5+4$

b.) $-2-(-2+6)\cdot 5$

c.) $12\cdot(3-6)-6\cdot(6+7)$

d.) $-(3-3)\cdot 5+3\cdot(2-7)$

Cuando se presenta un **paréntesis dentro de otro paréntesis** procedemos a realizar las operaciones indicadas en el paréntesis interno y así sucesivamente hasta obtener el número correspondiente a la expresión.

■ **Ejemplo 22**

Determine el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $-2+3\cdot[6-2\cdot(3-12)]$

Solución

$$\begin{aligned} -2+3\cdot[6-2\cdot(3-12)] &= -2+3\cdot[6-2\cdot(-9)] \\ &= -2+3\cdot[6+18] \\ &= -2+3\cdot[24] \\ &= -2+72 \\ &= 70 \end{aligned}$$

Por lo que, $-2+3\cdot[6-2\cdot(3-12)]=70$

b.) $-\{6+7\cdot(5-2\cdot 4)+4\}$

Solución

$$\begin{aligned}
-\{6+7\cdot(5-2\cdot 4)+4\} &= -\{6+7\cdot(5-8)+4\}\\
&= -\{6+7\cdot(-3)+4\}\\
&= -\{6-21+4\}\\
&= -\{-11\}\\
&= 11
\end{aligned}$$

Por lo que, $-\{6+7\cdot(5-2\cdot 4)+4\}=11$

Ejercicios 9

Determine el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $2\cdot[3\cdot(7-11)-21]-4$

b.) $4-5\cdot[3\cdot(5-2)+8-2\cdot 6]$

Ejemplo 23

Determine el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $5-2\cdot[3\cdot(7-4)-(-12+3)]-6$

Solución

$$\begin{aligned}
5-2\cdot[3\cdot(7-4)-(-12+3)]-6 &= 5-2\cdot[3\cdot(3)-(-9)]-6\\
&= 5-2\cdot[9+9]-6\\
&= 5-2\cdot(18)-6\\
&= 5-36-6\\
&= -31-6\\
&= -37
\end{aligned}$$

Por lo que, $\quad 5-2\cdot[3\cdot(7-4)-(-12+3)]-6=-37$

b.) $-7\cdot(3-4\cdot 2)+2\cdot[-2\cdot(-6-1)+3]$

Solución

$$\begin{aligned}
-7\cdot(3-4\cdot 2)+2\cdot[-2\cdot(-6-1)+3]\} &= -7\cdot(3-8)+2\cdot[-2\cdot(-7)+3]\} \\
&= -7\cdot(-5)+2\cdot[14+3]\} \\
&= 35+2\cdot(17) \\
&= 35+34 \\
&= 69
\end{aligned}$$

Por lo que, $\quad -7\cdot(3-4\cdot 2)+2\cdot[-2\cdot(-6-1)+3]=69$

Ejercicios 10

Determine el número que representa cada una de las siguientes expresiones:

a.) $-3[4(3-2)-(-5+16)+12]-16$

b.) $5-2\cdot[(5-7)+(3-2)-1]\cdot(-1)$

c.) $1-8\cdot[10\cdot(-15-2)-17]+6\cdot(-7-84)$

d.) $5-2\cdot(3-11)\cdot(-4)[5-(6-9)]$

Ejemplo 24

Determine el número que representa la expresión: $12-\{-2+3\cdot[4-(-8+12)+1]-2\}+3$

Solución

$$\begin{aligned}
12-\{-2+3\cdot[4-(-8+12)+1]-2\}+3 &= 12-\{-2+3\cdot[4-(4)+1]-2\}+3 \\
&= 12-\{-2+3\cdot[1]-2\}+3 \\
&= 12-\{-2+3-2\}+3 \\
&= 12-\{-1\}+3 \\
&= 12+1+3 \\
&= 16
\end{aligned}$$

Por lo que, $\quad 12-\{-2+3\cdot[4-(-8+12)+1]-2\}+3=16$

Ejercicios 11

Determine el número que representa cada una de las siguientes expresiones.

a.) $-\{-10 \cdot [7 \cdot 8 - (5 - 9)] + 17\} + 5$

b.) $-22 + 15 - 17 - 14 + 35$

c.) $32 - 77 - 22 + 14$

d.) $-8 - 22 - 14 + 25$

e.) $2(13 - 2) + [\{3 - 4 + (2 - 7)\} - 8] - 6$

f.) $8 - 6 \cdot [5 \cdot (6 - 3 \cdot \{-3 \cdot (5 - 2)\} + 2) - 1] + 7$

g.) $3 \cdot [2 \cdot \{-(3 - 2) + 7 \cdot 4 - 5 \cdot (11 - 6)\} + 8] - 2$

Observación: La adición, la sustracción y la multiplicación son operaciones definidas en el conjunto de los números enteros, esto es, si se relacionan dos números enteros, por alguna de estas operaciones el resultado es un número entero. Pero la división no es una operación definida en el conjunto de los números enteros pues, por ejemplo:

a.) $3 \div 2 = 1.5$ y 1.5 no es un número entero

b.) $-7 \div 3 = -2.\overline{3}$ y $-2.\overline{3}$ no es un número entero

c.) $5 \div (-4) = -1.25$ y -1.25 no es un número entero

Sin embargo, para el conjunto de los números enteros, tenemos el siguiente resultado.

1.7.5 Algoritmo de la división

Si $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$ entonces existen c y r; con $c \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$ tales que: $a = b \cdot c + r$, con $r < b$ $(*)$

Nota: Con respecto a la igualdad anterior el número c es el cociente, y el número r es el residuo que se obtiene al dividir a por b.

Consideremos los siguientes ejemplos:

1.) Realizando la división de 150 por 6 tenemos que:

$$\begin{array}{r|l} 150 & 6 \\ \cline{2-2} \underline{-12} & 25 \\ 30 & \\ \underline{-30} & \\ 0 & \end{array}$$

Como $0 < 6$, el procedimento de división se detiene.

El cociente es 25 y el residuo es 0, y además por el algoritmo de la división: $150 = 6 \cdot 25 + 0$

2.) Realizando la división de 23 por 4 tenemos que:

$$\begin{array}{r|l} 23 & \underline{\;4\;} \\ \underline{-20} & 5 \\ 3 & \end{array}$$

Como $3 < 4$, el procedimento de división se detiene.

El cociente es 5 y el residuo es 3, y además por el algoritmo de la división: $23 = 4 \cdot 5 + 3$

Ejercicios 12

Por medio de la división determine el cociente c y el residuo r para cada uno de los casos siguientes:

a.) $49 = 5 \cdot c + r$

b.) $476 = 7 \cdot c + r$

c.) $135 = 45 \cdot c + r$

d.) $9 = 15 \cdot c + r$

1.7.6 Divisibilidad

Definición 15

Sean $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$. Se dice que **:** a **es divisible por** b, si al dividir $|\, a \,|$ por $|\, b \,|$, se tiene como cociente un número natural c, y como residuo 0.

Ejemplo 25

Determine si 72 es divisible por 6:

Solución

Como $|\, 72 \,| = 72$, $|\, 6 \,| = 6$ y al realizar la división de 72 por 6 tenemos que

$$\begin{array}{r|l} 72 & \underline{\;6\;} \\ \underline{-6} & 12 \\ 12 & \\ \underline{-12} & \\ 0 & \end{array}$$

El residuo es 0 y el cociente es 12 (un número natural). Por lo tanto 72 es divisible por 6.

Ejemplo 26

Determine si 37 es divisible por -5:

Solución

Como $\mid 37 \mid = 37$, y $\mid -5 \mid = 5$ y al realizar la división de 37 por 5 tenemos que

$$\begin{array}{r|l} 37 & \underline{5} \\ \underline{-35} & 7 \\ 2 & \end{array}$$

El residuo es 2 y el cociente es 7 (un número natural); al ser el residuo diferente de cero, 37 no es divisible por -5.

Ejemplo 27

Determine si -135 es divisible por 7:

Solución

Como $\mid -135 \mid = 135$, $\mid 7 \mid = 7$ y al realizar la división de 135 por 7 tenemos que

$$\begin{array}{r|l} 135 & \underline{7} \\ \underline{-7} & 19 \\ 65 & \\ \underline{-63} & \\ 2 & \end{array}$$

El cociente es 19 y el residuo es 2, al ser el residuo diferente de 0, -135 no es divisible por 5.

Ejemplo 28

Determine si -51 es divisible por -3:

Solución

Como $\mid -51 \mid = 51$ y $\mid -3 \mid = 3$ y al realizar la división de 51 por 3 tenemos que

$$\begin{array}{r|l} 51 & \underline{3} \\ \underline{-3} & 17 \\ 21 & \\ \underline{-21} & \\ 0 & \end{array}$$

El cociente es 17 y el residuo es 0, por lo tanto 51 es divisible por -3.

Ejercicios 13

Realizando la división correspondiente conteste las siguientes preguntas:

1.) ¿Es 154 divisible por 7? Justifique su respuesta.

2.) ¿Es 39 divisible por -12? Justifique su respuesta.

3.) ¿Es -104 divisible por -13? Justifique su respuesta.

4.) ¿Es -71 divisible por 17? Justifique su respuesta.

1.7.7 Algunos criterios de divisibilidad

De acuerdo con el concepto de divisibilidad estudiado anteriormente se tiene que para determinar si un número entero a es divisible por un número entero b, debe realizarse la división de $\mid a \mid$ por $\mid b \mid$. Si el residuo que se obtiene al realizar esta división es cero, entonces a es divisible por b. Si este residuo es diferente de cero entonces a no es divisible por b. Este procedimiento resulta ser un poco largo cuando las cantidades consideradas son "muy grandes".

A continuación enunciaremos algunos criterios de divisibilidad que nos permitirán determinar, en forma abreviada, algunos casos en que un número entero a es divisible por un número natural b.

Para los criterios que siguen entenderemos por dígitos de nuestro sistema de numeración decimal los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Criterio de la divisibilidad por 2

Un número entero es divisible por 2, si y sólo sí si el dígito de las unidades es divisible por 2.

Por ejemplo:

a.) 374 es divisible por 2 pues el dígito de las unidades (4) es divisible por 2.

b.) 5620 es divisible por 2 pues el dígito de las unidades (0) es divisible por 2.

c.) 537 no es divisible por 2 pues el dígito de las unidades (7) no es divisible por 2.

d.) -238 es divisible por 2 pues el dígito de las unidades (8) es divisible por 2.

e.) -159 no es divisible por 2 pues el dígito de las unidades (9) no es divisible por 2.

Ejercicios 14

Usando el criterio anterior determine cuáles de los siguientes números son divisibles por 2.

a.) 1268
b.) -35794
c.) 9237
d.) 2450
e.) -379
f.) -475

Nota:

1.) Si un número entero es divisible por 2 recibe el nombre de **número par**.

2.) Si un número entero no es divisible por 2, recibe el nombre de **número impar**.

Criterio de la divisibilidad por 3

Un número entero es divisible por 3 si y sólo sí la suma de sus dígitos es divisible por 3.

Por ejemplo:

a.) 504 es divisible por 3, pues $5 + 0 + 4 = 9$ y 9 es divisible por 3.

b.) 957 es divisible por 3, pues $9 + 5 + 7 = 21$ y 21 es divisible por 3.

c.) -375 es divisible por 3, pues $3 + 7 + 5 = 15$ y 15 es divisible por 3.

d.) -218 no es divisible por 3, pues $2 + 1 + 8 = 11$ y 11 no es divisible por 3.

e.) -4523 no es divisible por 3, pues $4 + 5 + 2 + 3 = 14$ y 14 no es divisible por 3.

Observe que en los casos (c), (d) y (e) anteriores para aplicar el criterio de divisibilidad, no se toma en cuenta el signo $(-)$

Ejercicios 15

Usando el criterio de divisibilidad por 3, determine cuáles de los siguientes números son divisibles por 3.

a.) 374	c.) 1983	e.) -5383
b.) -1047	d.) 17983	f.) -285

Criterio de la divisibilidad por 5

Un número entero es divisible por 5, si el dígito de las unidades es 5 (cinco) o es 0 (cero).

Por ejemplo:

a.) 725 es divisible por 5, pues el dígito de las unidades es 5.

b.) 490 es divisible por 5, pues el dígito de las unidades es 0.

c.) -468 no es divisible por 5, pues el dígito de las unidades no es 5, ni es 0.

Ejercicios 16

Usando el criterio de la divisibilidad por 5, determine cuáles de los siguientes números son divisibles por 5.

a.) -1345	c.) 920	e.) -41270
b.) 753	d.) -5554	f.) 11235

Criterio de la divisibilidad por 7

Un número entero n es divisible por 7 si y sólo sí la resta entre, el valor absoluto del número que se obtiene al suprimir el dígito de las unidades de n y el doble del dígito de las unidades es divisible por 7.

■ **Ejemplo 29**

Determine si 182 es divisible por 7

Solución

El dígito de las unidades de 182 es 2 y el doble de este dígito es 4; además: $18 - 4 = 14$

Como 14 es divisible por 7, entonces 182 es divisible por 7.

■ **Ejemplo 30**

Determine si 426 es divisible por 7

Solución

El dígito de las unidades de 426 es 6 y el doble de este dígito es 12; además: $42 - 12 = 30$

Como 30 **no** es divisible por 7, entonces 426 **no** es divisible por 7.

■ **Ejemplo 31**

Determine si 108 es divisible por 7

Solución

El dígito de las unidades de 108 es 8 y el doble del dígito es 16; además: $10 - 16 = -6$

Como -6 **no** es divisible por 7, entonces 108 **no** es divisible por 7.

Ejemplo 32

Determine si 119 es divisible por 7

Solución

El dígito de las unidades de 119 es 9 y el doble del dígito es 18; además: $11 - 18 = -7$

Como -7 es divisible por 7, entonces 119 es divisible por 7.

Ejemplo 33

Determine si -263 es divisible por 7

Solución

El dígito de las unidades de -263 es 3 y el doble del dígito es 6, $\mid -26 \mid = 26$ y además: $26 - 6 = 20$

Como 20 **no** es divisible por 7, entonces -263 **no** es divisible por 7.

Ejemplo 34

Determine si -385 es divisible por 7

Solución

El dígito de las unidades de -385 es 5 y el doble del dígito es 10, $\mid -38 \mid = 38$ y además: $38 - 10 = 28$

Como 28 es divisible por 7, entonces -385 es divisible por 7.

Ejercicios 17

Usando el criterio de la divisibilidad por 7, determine cuáles de los siguientes números son divisibles por 7.

a.) 161
b.) -277
c.) 581
d.) -669
e.) -735
f.) 806

Criterio de la divisibilidad por 11

Un número entero es divisible por 11 si y sólo sí la diferencia entre la suma de los dígitos que se encuentran en los lugares impares y la suma de los dígitos que se encuentran en los lugares pares es divisible por 11.

Ejemplo 35

Determine si 8349 es divisible por 11

Solución

La suma de los dígitos que se encuentran en los lugares impares es: $8+4=12$.

La suma de los dígitos que se encuentran en los lugares pares es: $3+9=12$, además: $12-12=0$

Como 0 es divisible por 11, entonces 8349 es divisible por 11.

■ **Ejemplo 36**

Determine si -7293 es divisible por 11

Solución

La suma de los dígitos que se encuentran en los lugares impares es: $7+9=16$.

La suma de los dígitos que se encuentran en los lugares pares es: $2+3=5$, además: $16-5=11$

Como 11 es divisible por 11, entonces -7293 es divisible por 11.

■ **Ejemplo 37**

Determine si 7869 es divisible por 11

Solución

La suma de los dígitos que se encuentran en los lugares impares es: $7+6=13$.

La suma de los dígitos que se encuentran en los lugares pares es: $8+9=17$, además: $13-17=-4$

Como -4 no es divisible por 11, entonces 7869 no es divisible por 11.

Ejercicios 18

Usando el criterio de la dibisibilidad por 11, determine cuáles de los siguientes números son divisibles por 11.

a.) 23716
b.) -37631
c.) -133375
d.) 66687
e.) 17983
f.) -21813

1.7.8 Múltiplos y factores de un número entero

■ **Definición 16**

Sean $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, $c \in \mathbb{Z}$, si $a = b \cdot c$ se dice que a es un número múltiplo de b y c; además b y c son factores o divisores de a.

■ **Ejemplo 38**

1.) Como $45 = 9 \cdot 5$ entonces 45 es un múltiplo de 9 y 5 , 9 es un factor o divisor de 45.

2.) Como $37 = 1 \cdot 37$ entonces 37 es un múltiplo de 37 y 1, entonces 1 y 37 son factores o divisores de 37.

3.) Como $-42 = -6 \cdot 7$ entonces -42 es un múltiplo de -6 y 7 entonces -6 y 7 son factores o divisores de -42.

Definición 17

Sean $a \in \mathbb{Z}$ y b un factor de a. Si $b \in \mathbb{N}$ entonces b recibe el nombre de factor natural de a.

Ejemplo 39

1.) Como $-30 = -2 \cdot 15$ y $15 \in \mathbb{N}$ entonces 15 recibe el nombre de factor natural de -30.

2.) Como $77 = 11 \cdot 7$ y $11 \in \mathbb{N},\ 7 \in \mathbb{N}$ entonces 11 y 7 reciben el nombre de factores naturales de 77.

Ejemplo 40

Determine los factores (divisores) naturales de 14

Solución

14 es divisible únicamente por $1,\ -1,\ -2,\ 7,\ -7,\ 14$ y -14 por lo tanto los factores (divisores) naturales de 14 son:
$1,\ 2,\ 7$ y 14.

Ejemplo 41

Determine todos los factores (divisores) naturales de 6

Solución

6 es divisible únicamente por $1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ 6$ y -6 entonces los factores (divisores) naturales son:
$1,\ 2,\ 3$ y 6.

Ejemplo 42

Determine todos los factores (divisores) naturales de 17

Solución

17 es divisible únicamente por $1,\ -1,\ 17$ y -17 entonces los factores (divisores) naturales de 17 son 1 y 17.

Ejercicios 19

1.) Determine todos los factores naturales de 36

2.) Determine todos los factores naturales de 39

3.) Determine todos los factores naturales de 43

Observación:

Si $n \in \mathbb{N}$ entonces siempre se cumple que $1, \ -1, \ n$ y $-n$ son factores o divisores de n.
Pues: $n = 1 \cdot n, \ \ n = (-1) \cdot (-n)$

1.7.9 Números primos y números compuestos

■ **Definición 18**

Sea $n \in \mathbb{N}, \ \ n > 1$.
Se dice que n es un **número primo**, si sus únicos factores (divisores) naturales son 1 y n.

■ **Ejemplo 43**

a.) 23 es un número primo pues sus únicos factores (divisores) naturales son 1 y 23.

b.) 77 no es un número primo pues sus factores naturales son $1, \ 7, \ 11$ y 77.

Ejercicios 20

1.) Escriba los números naturales primos menores que 30.

2.) ¿Es 43 un número primo? Justifique su respuesta.

3.) ¿Es 69 un número primo? Justifique su respuesta.

4.) ¿Cuáles números naturales pares son números primos?

■ **Definición 19**

Sea $n \in \mathbb{N}, \ \ n > 1$.

Se dice que n es un **número compuesto**, si n **no** es un número primo.

Ejercicios 21

Escriba cinco números naturales compuestos.

■ **Definición 20**

Sea $a \in \mathbb{Z}$
Si c es un factor natural de a y c es un número primo se dice que c es un factor primo de a.

Ejemplo 44

a.) $15 = 5 \cdot 3$ y $5,\ 3$ son números primos por lo que 5 y 3 son factores primos de 15

b.) $42 = 6 \cdot 7 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, como $2,\ 3$ y 7 son números primos y a su vez son factores de 42, entonces $2,\ 3$ y 7 son factores primos de 42.

Ejercicios 22

Determine los factores primos, de los siguientes números:

a). 6   *b*.) 10   *c*.) -55 *d*.) -140 *e*.) -73

1.7.10 Representación de un número compuesto como el producto de números primos

Aceptemos sin demostrar el siguiente teorema.

Teorema 1

Todo número natural compuesto se puede expresar como producto de números primos.
A la representación de un número natural como el producto de factores primos la llamaremos **factorización prima** o **factorización completa** del número.

Aceptaremos además que la factorización prima de un número natural es única, salvo el orden de los factores.

Existen diferentes formas de ir indicando el procedimiento para la obtención de la factorización prima de un número natural. Estas formas lo que buscan es simplificar el trabajo, pero todos conducen a un mismo resultado. A continuación indicamos una forma, que consideramos simplifica bastante el trabajo y a la vez permite obtener la factorización completa de un número en una forma ordenada.

Ejemplo 45

Determine la factorización prima de 300

Solución

300	2
150	2
75	3
25	5
5	5
1	

Así $300 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$

Ejemplo 46

Determine la factorización prima de 105

Solución

105	3
35	5
7	7
1	

Así $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$

Ejercicios 23

Para cada uno de los números, determine su factorización prima:

a.) 504 *b.*) 1170 *c.*) 735 *d.*) 154 *e.*) 675

1.7.11 Máximo divisor común

Los conjuntos cuyos elementos son los divisores naturales de 12 y 18 respectivamente son:

$D_{12}: \left\{ \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, 4, \boxed{6}, 12 \right\}$

$D_{18}: \left\{ \boxed{1}, \boxed{2}, \boxed{3}, \boxed{6}, 9, 18 \right\}$

Encerrados en un rectángulo aparecen los números que pertenecen a ambos conjuntos, al mayor de estos números lo llamaremos **máximo divisor común** de 12 y 18, en este caso 6, y escribimos M.D.C.$(12, 18) = 6$

En general si a, b, ..., c son números naturales y el máximo divisor común de ellos es k entonces escribimos:

$$\text{M.D.C.}(a, b, ..., c) = k$$

Ejemplo 47

Determine M.D.C.(12, 40, 56)

Solución

$D_{12}:\ \left\{ 1,\ 2,\ 3,\ \boxed{4},\ 6,\ 12 \right\}$

$D_{40}:\ \left\{ 1,\ 2,\ \boxed{4},\ 5,\ 8,\ 10,\ 20,\ 40 \right\}$

$D_{56}:\ \left\{ 1,\ 2,\ \boxed{4},\ 7,\ 8,\ 14,\ 28,\ 56 \right\}$

Así obtenemos que M.D.C.(12, 40, 56) = 4

Definición 21

El máximo divisor común de dos o más números naturales es el mayor número natural que es divisor de cada uno de los números dados.

Ejercicios 24

Verifique que:

1.) M.D.C. (54, 90) = 6
2.) M.D.C. (5, 25, 90) = 5

El procedimiento que hemos visto para determinar el máximo divisor común de dos o más números no es muy práctico cuando se trabaja con cantidades grandes.

Podemos obtener el mismo resultado con el procedimiento que se presenta en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 48

Determine M.D.C.(2520, 720, 540)

Solución

El procedimiento se basa en escribir los divisores primos comunes de los tres números en una columna a la derecha de la línea vertical.

$$\begin{array}{rrr|l}
2520 & 720 & 540 & 2 \\
1260 & 360 & 270 & 2 \\
630 & 180 & 135 & 3 \\
210 & 60 & 45 & 3 \\
70 & 20 & 15 & 5 \\
14 & 4 & 3 &
\end{array}$$

El M.D.C de los tres números dados al inicio se obtiene multiplicando los números que están a la derecha de la línea vertical, o sea:

M.D.C.(2520, 720, 540) $= 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 180$

Así, M.D.C.(2520, 720, 540) $= 180$

Ejercicios 25

1.) Determine M.D.C.(2745, 5400, 3780)

2.) Determine M.D.C.(2478, 29190, 9360)

1.7.12 Mínimo múltiplo común

Los conjuntos cuyos elementos son los múltiplos naturales de 3 y 2 son respectivamente:

$M_3 = \left\{ 3,\ \boxed{6},\ 9,\ \boxed{12},\ 15,\ \boxed{18},\ 21,\ \boxed{24},\ ... \right\}$

$M_2 = \left\{ 2,\ 4,\ \boxed{6},\ 8,\ 10,\ \boxed{12},\ 14,\ 16,\ \boxed{18},\ 20,\ 22,\ \boxed{24},\ 26,\ ... \right\}$

Encerrados en un rectángulo aparecen los números que pertenecen a ambos conjuntos, al menor de todos estos números se le asigna el nombre de **mínimo múltiplo común** de 3 y 2, en este caso 6, y escribimos m.m.c.$(3, 2) = 6$

En general si a, b, ..., c son números naturales y el mínimo múltiplo común de ellos es r entonces escribimos.

$$\text{m.m.c.}(a,\ b,\ ...,\ c) = r$$

Ejemplo 49

Determine m.m.c.(12, 18, 24)

Solución

$M_{12} : \left\{ 12,\ 24,\ 36,\ 48,\ 60,\ \boxed{72},\ 84,\ 96,\ 108,\ 120,\ 132,\ 144,\ ... \right\}$

$M_{18} : \left\{ 18,\ 36,\ 54,\ \boxed{72},\ 90,\ 108,\ 126,\ 144,\ 162,\ ... \right\}$

$M_{24} : \left\{ 24,\ 48,\ \boxed{72},\ 96,\ 120,\ 144,\ 168 ... \right\}$

Así obtenemos que m.m.c.(12, 18, 24) $= 72$

Definición 22

El mínimo múltiplo común de dos o más números naturales es el menor número natural que es múltiplo de cada uno de los números dados.

El procedimiento que hemos visto para determinar el mínimo múltiplo común de dos o más números no es muy práctico cuando se trabaja con cantidades grandes.

Podemos obtener el mismo resultado con el procedimiento que se presenta en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 50

Determine m.m.c.(12, 28, 24)

Solución

El procedimiento se basa en escribir los factores primos de al menos uno de los tres números en una columna a la derecha de la línea vertical.

12	18	24	2
6	9	12	2
3	9	6	2
3	9	3	3
1	3	1	3
1	1	1	

Observe que el procedimiento se "detiene" cuando el número que se obtiene en cada una de las columnas a la izquierda de la línea vertical es 1.

El mínimo múltiplo común de los números dados se obtiene multiplicando los números que están a la derecha de la línea vertical, o sea:

m.m.c.(12, 18, 24) $= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 72$

Así m.m.c.(12, 18, 24) $= 72$

Ejercicios 26

Determine:

1.) m.m.c.(14, 22)
2.) m.m.c.(12, 17, 20)
3.) m.m.c.(24, 40, 56)
4.) m.m.c.(120, 360, 180)
5.) m.m.c.(121, 64)
6.) m.m.c.(91, 39)

Teorema 2

Sean $a \in \mathbb{N}$ y $b \in \mathbb{N}$ tales que a y b **no** tienen factores primos comunes entonces m.m.c. $(a,\, b) = a \cdot b$

En tal caso decimos que a y b son primos relativos o coprimos entre sí.

Por ejemplo:

1.) 2 y 3 son primos relativos entre sí $\Longrightarrow$ m.m.c. $(3,\, 2) = 6$

2.) 15 y 7 son primos relativos entre sí. $\Longrightarrow$ m.m.c. $(15,\, 7) = 105$

Ejercicios 27

1.) Determine si 32 y 35 son primos relativos entre sí.

2.) Determine si 66 y 55 son primos relativos entre sí.

1.8 Propiedades de los números racionales

Recordemos que el conjunto cuyos elementos son los números que se pueden representar por $\dfrac{a}{b}$, con $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$ recibe el nombre de **conjunto de los números racionales** y se denota con el símbolo $\mathbb{Q}$. Así:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \;/\; a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \text{ y } b \neq 0 \right\}$$

Definición 23

Sea $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0$

En $\dfrac{a}{b}$; el número representado por a se llama **numerador**, el número representado por b se llama **denominador**, la expresión $\dfrac{a}{b}$ recibe el nombre de fracción.

1.8.1 Fracciones equivalentes

Definición 24

Sea $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $\dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$

Las fracciones $\dfrac{a}{b}$ y $\dfrac{c}{d}$ reciben el nombre de fracciones equivalentes (entre sí) si representan al mismo número racional y en tal caso escribimos $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

Ejemplo 51

Determine si $\frac{4}{8}$ es equivalente a $\frac{1}{2}$

Solución

$\frac{4}{8} = 0.5$ pues $4 \div 8 = 0.5$

$\frac{1}{2} = 0.5$ pues $1 \div 2 = 0.5$

Por lo que $\frac{4}{8}$ y $\frac{1}{2}$ representan un mismo número racional es decir, son fracciones equivalentes entre sí, es decir $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Ejemplo 52

Determine cuáles de las fracciones $\frac{5}{20}$, $\frac{16}{4}$ y $\frac{2}{8}$ son equivalentes a $\frac{3}{12}$

Solución

$\frac{3}{12} = 0.25$ pues $3 \div 12 = 0.25$

$\frac{5}{20} = 0.25$ pues $5 \div 20 = 0.25$

$\frac{16}{4} = 4$ pues $16 \div 4 = 4$

$\frac{2}{8} = 0.25$ pues $2 \div 8 = 0.25$

De donde se concluye que $\frac{3}{12}$ es equivalente a $\frac{5}{20}$ y a $\frac{2}{8}$, es decir $\frac{3}{12} = \frac{5}{20}$ y $\frac{3}{12} = \frac{2}{8}$

Ejercicios 28

Determine cuáles de las fracciones $\frac{-2}{6}$, $\frac{-3}{9}$ y $\frac{-6}{2}$ son equivalentes entre sí:

En los ejemplos (54) y (55) anteriores obtuvimos que:

$\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$; $\frac{3}{12} = \frac{5}{20}$ y $\frac{3}{12} = \frac{2}{8}$

Observe que:

a.) $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ y también se cumple que $4 \cdot 2 = 8 \cdot 1$

b.) $\frac{3}{12} = \frac{5}{20}$ y también se cumple que $3 \cdot 20 = 12 \cdot 5$

c.) $\frac{3}{12} = \frac{2}{8}$ y también se cumple que $3 \cdot 8 = 12 \cdot 2$

Los casos (a), (b) y (c) anteriores son ejemplos donde se aplicó el siguiente criterio, el cual se puede usar para determinar si dos fracciones son equivalentes entre sí:

Sean $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $\dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, $\quad \dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$

Ejemplo 53

a.) Determine si $\dfrac{-3}{5}$ es equivalente a $\dfrac{-21}{35}$

b.) Determine si $\dfrac{3}{18}$ es equivalente a $\dfrac{15}{9}$

c.) Determine si $\dfrac{-5}{2}$ es equivalente a $\dfrac{-10}{2}$

Solución

a.) $\dfrac{-3}{5}$ es equivalente a $\dfrac{-21}{35}$ es decir, $\dfrac{-3}{5} = \dfrac{-21}{35}$, pues se cumple que $-3 \cdot 35 = 5(-21)$

b.) $\dfrac{3}{18}$ no es equivalente a $\dfrac{15}{9}$ es decir, $\dfrac{3}{18} \neq \dfrac{15}{9}$, pues se tiene que $3 \cdot 9 \neq 18 \cdot 15$

c.) $\dfrac{-5}{2}$ no es equivalente a $\dfrac{-10}{2}$ es decir, $\dfrac{-5}{2} \neq \dfrac{-10}{2}$, pues se tiene que $-5 \cdot 2 \neq -10 \cdot 2$

Ejercicios 29

1. Determine cuáles pares de las fracciones siguientes son equivalentes entre sí:

   a.) $\dfrac{6}{7}$ y $\dfrac{8}{9}$

   b.) $\dfrac{35}{-21}$ y $\dfrac{-5}{3}$

   c.) $\dfrac{3}{1}$ y $\dfrac{57}{19}$

   d.) $\dfrac{25}{4}$ y $\dfrac{4}{25}$

2. Usando el resultado anterior verifique que:

   Si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $\dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ entonces se cumple que:

   a.) $\dfrac{-a}{-b} = \dfrac{a}{b}$ $\qquad$ *b.)* $\dfrac{a}{-b} = \dfrac{-a}{b}$

Nota:

En adelante, por las igualdades anteriores obtenidas en el ejercicio 25, parte (2), trabajaremos con fracciones equivalentes cuyo denominador sea positivo.

1.8.2 Simplificación de fracciones

Sea $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

Simplificar la fracción $\dfrac{a}{b}$ consiste en dividir el numerador y el denominador de dicha fracción por un mismo número natural n, $n \geq 2$ y n un factor común de a y b. Obtenemos así la fracción:

$$\frac{a \div n}{b \div n}$$

la cual es equivalente a $\dfrac{a}{b}$ y escribimos

$$\frac{a}{b} = \frac{a \div n}{b \div n}$$

Ejemplo 54

Simplifique las siguientes fracciones:

a.) $\dfrac{46}{28}$ b.) $\dfrac{-39}{27}$ c.) $\dfrac{15}{4}$

Solución

a.) $\dfrac{46}{28}$

Dividiendo el numerador y el denominador por 2 tenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{46}{28} &= \frac{46 \div 2}{28 \div 2} \\ &= \frac{23}{14} \end{aligned}$$

es decir;

$$\frac{46}{28} = \frac{23}{14}$$

b.) $\dfrac{-39}{27}$

Dividiendo el numerador y el denominador por 3 tenemos que:

$$\begin{aligned}\frac{-39}{27} &= \frac{-39 \div 3}{27 \div 3}\\ &= \frac{-13}{9}\end{aligned}$$

es decir;

$$\frac{-39}{27} = \frac{-13}{9}$$

c.) $\frac{15}{4}$

En este caso 15 y 4 no tienen factores comunes mayores que 2, por esta razón decimos que $\frac{15}{4}$ no se puede simplificar.

1.8.3 Fracciones canónicas y fracciones reducibles

Consideremos $\frac{9}{15}$, el máximo divisor común de 9 y 15 es 3, utilizando esto podemos simplificar $\frac{9}{15}$ de la manera siguiente:

$$\frac{9}{15} = \frac{9 \div 3}{15 \div 3} = \frac{3}{5} \quad \text{es decir;} \quad \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$$

Ahora si consideramos $\frac{3}{5}$ observemos que M.D.C. $(3, 5) = 1$, por lo cual $\frac{3}{5}$ no se puede simplificar.

■ **Definición 25**

Decimos que un número racional está representado por una fracción canónica $\frac{a}{b}$, si el máximo divisor común de $|a|$ y $|b|$ es 1.
Así con respecto al caso anterior $\frac{3}{5}$ es la fracción canónica de $\frac{9}{15}$.

Nota

La fracción canónica correspondiente a un número racional se conoce también con el nombre de fracción irreducible.

■ **Teorema 3**

Sea $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

Si M.D.C. $(|a|\ ,\ |b|) = k$ entonces la fracción $\frac{a \div k}{b \div k}$ es una fracción canónica

■ **Ejemplo 55**

Determine la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\dfrac{42}{105}$ b.) $\dfrac{-84}{30}$

Solución

a.) $\dfrac{42}{105}$ Calculemos M.D.C. $(42\ ,\ 105)$

$$\begin{array}{cc|c} 42 & 105 & 3 \\ 14 & 35 & 7 \\ 2 & 5 & \end{array}$$

Por lo que M.D.C. $(42, 105) = 3 \cdot 7 = 21$

Así pues

$$\begin{aligned} \frac{42}{105} &= \frac{42 \div 21}{105 \div 21} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

De donde la fracción canónica correspondiente a $\dfrac{42}{105}$ es $\dfrac{2}{5}$ es decir;

$$\frac{42}{105} = \frac{2}{5}$$

b.) $\dfrac{-84}{30}$ Calculemos M.D.C. $(|-84|\ ,\ |30|)$ es decir; M.D.C. $(84, 30)$

$$\begin{array}{cc|c} 84 & 30 & 2 \\ 42 & 15 & 3 \\ 14 & 5 & \end{array}$$

Por lo que M.D.C. $(84, 30) = 2 \cdot 3 = 6$

Así pues

$$\begin{aligned} \frac{-84}{30} &= \frac{-84 \div 6}{30 \div 6} \\ &= \frac{-14}{5} \end{aligned}$$

De donde la fracción canónica correspondiente a $\dfrac{-84}{30}$ es $\dfrac{-14}{5}$ es decir;

$$\frac{-84}{30} = \frac{-14}{5}$$

Ejercicios 30

Determine la fracción canónica correspondiente a:

1.) $\dfrac{81}{54}$ 3.) $\dfrac{75}{225}$ 5.) $\dfrac{-68}{17}$

2.) $\dfrac{-17}{23}$ 4.) $\dfrac{-171}{189}$ 6.) $\dfrac{675}{1260}$

1.8.4 Amplificación de fracciones

Amplificar una fracción $\dfrac{a}{b}$ consiste en multiplicar el numerador y el denominador de dicha fracción por un mismo número entero n, $n \geq 2$, obteniéndose así la fracción:

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

la cual es equivalente a $\dfrac{a}{b}$ y escribimos

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot n}{b \cdot n}$$

Por ejemplo:

Si en la fracción $\dfrac{3}{4}$ multiplicamos el numerador y el denominador por 5 obtenemos: $\dfrac{15}{20}$, y decimos en este caso que $\dfrac{15}{20}$ es una amplificación de $\dfrac{3}{4}$ es decir; $\dfrac{3}{4} = \dfrac{15}{20}$

Ejercicios 31

Haciendo uso de la amplificación de fracciones determine tres fracciones equivalentes a:

1.) $\dfrac{5}{3}$	3.) 1	5.) -2	7.) $\dfrac{7}{6}$	9.) $\dfrac{-11}{4}$
2.) -1	4.) $\dfrac{25}{10}$	6.) 0	8.) 6	10.) $\dfrac{-75}{7}$

1.8.5 Representación de números racionales usando el mínimo denominador común

Definición 26

El mínimo múltiplo común de los denominadores de dos o más fracciones recibe el nombre de mínimo denominador común de dichas fracciones.

Ejemplo 56

Determine el mínimo denominador común de $\dfrac{5}{6}$, $\dfrac{4}{9}$ y $\dfrac{-3}{2}$

Solución

El m.m.c. $(6, 9, 2) = 18$, por lo que por la definición anterior tenemos que 18 es el mínimo denominador común de $\dfrac{5}{6}$, $\dfrac{4}{9}$ y $\dfrac{-3}{2}$

Ejercicios 32

Para cada uno de los casos siguientes determine el mínimo denominador común de las fracciones dadas:

1.) $\dfrac{-5}{3}$ y $\dfrac{2}{7}$

2.) $\dfrac{-3}{5}$, $\dfrac{2}{3}$ y $\dfrac{-7}{15}$

3.) $\dfrac{3}{7}$, $\dfrac{2}{14}$ y $\dfrac{5}{3}$

4.) $\dfrac{13}{18}$, $\dfrac{5}{12}$, $\dfrac{-3}{54}$ y $\dfrac{5}{6}$

Ejemplo 57

Considere las fracciones $\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{-7}{6}$ y $\dfrac{8}{10}$ $(*)$

a.) Determine el mínimo denominador común de las fracciones anteriores.

b.) Escriba los números racionales representados en $(*)$ por medio de fracciones equivalentes cuyo denominador sea el mínimo denominador.

Solución

a.) Como m.m.c. $(3, 6, 10) = 30$ entonces 30 es el mínimo denominador común de: $\dfrac{5}{3}$, $\dfrac{-7}{6}$ y $\dfrac{8}{10}$

b.) Amplificando las fracciones dadas en $(*)$ podemos obtener fracciones cuyo denominador sea el mínimo denominador común o sea; 30, de la manera siguiente:

$\dfrac{5}{3} = \dfrac{5 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \dfrac{50}{30}$, es decir; $\dfrac{5}{3} = \dfrac{50}{30}$

$\dfrac{-7}{6} = \dfrac{-7 \cdot 5}{6 \cdot 5} = \dfrac{-35}{30}$, es decir; $\dfrac{-7}{6} = \dfrac{-35}{30}$

$\dfrac{8}{5} = \dfrac{8 \cdot 6}{5 \cdot 6} = \dfrac{48}{30}$, es decir; $\dfrac{8}{5} = \dfrac{48}{30}$

Ejercicios 33

En cada uno de los casos siguientes escriba los números racionales dados, por medio de fracciones, cuyo denominador sea el mínimo denominador común de las fracciones dadas:

1.) $\dfrac{-5}{7}$, $\dfrac{3}{14}$ y $\dfrac{-7}{21}$

2.) $\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{-2}{15}$, $\dfrac{7}{60}$ y -1

3.) $\dfrac{4}{9}$, $\dfrac{-5}{3}$, -2 y 1

4.) $\dfrac{3}{44}$, $\dfrac{-2}{121}$ y $\dfrac{25}{77}$

1.9 Algoritmos de las operaciones definidas en $\mathbb{Q}$

1.9.1 Adición de números racionales

: Caso 1

Algoritmo de la adición para números racionales representados por fracciones de igual denominador:

Si $\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $\dfrac{c}{b} \in \mathbb{Q}$ entonces $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$

En general:

Si $\dfrac{a_1}{b} \in \mathbb{Q}$, $\dfrac{a_2}{b} \in \mathbb{Q}$, ... , $\dfrac{a_n}{b} \in \mathbb{Q}$ entonces

$$\frac{a_1}{b} + \frac{a_2}{b} + \frac{a_3}{b} + ... + \frac{a_n}{b} = \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{b}$$

Ejemplo 58

Escriba la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\dfrac{3}{7} + \dfrac{2}{7} + \dfrac{6}{7}$ b.) $\dfrac{5}{4} + \dfrac{12}{4} + \dfrac{-3}{4}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned} \frac{3}{7} + \frac{2}{7} + \frac{6}{7} &= \frac{3+2+6}{7} \\ &= \frac{11}{7} \end{aligned}$$

Como m.m.c. $(11, 7) = 1$, $\dfrac{11}{7}$ es la fracción canónica correspondiente a $\dfrac{3}{7} + \dfrac{2}{7} + \dfrac{6}{7}$

b.)
$$\begin{aligned} \frac{5}{4} + \frac{12}{4} + \frac{-3}{4} &= \frac{5+12+-3}{4} \\ &= \frac{17-3}{4} \\ &= \frac{14}{4} \\ &= \frac{14 \div 2}{4 \div 2} \\ &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

Como m.m.c. $(7, 2) = 1$, $\dfrac{7}{2}$ es la fracción canónica correspondiente a $\dfrac{5}{4} + \dfrac{12}{4} + \dfrac{-3}{4}$

Ejercicios 34

Escriba la fracción canónica correspondiente a:

1.) $\dfrac{4}{3} + \dfrac{1}{3}$

2.) $\dfrac{11}{5} + \dfrac{-6}{5} + \dfrac{-30}{5} + \dfrac{1}{5}$

3.) $\dfrac{3}{13} + \dfrac{2}{13} + \dfrac{-4}{13}$

4.) $\dfrac{-1}{11} + \dfrac{-3}{11} + \dfrac{-2}{11}$

: Caso 2

Algoritmo de la adición para números racionales representados por fracciones cuyos denominadores no son iguales entre sí.

Para sumar números racionales representados por fracciones cuyos denominadores no son iguales entre sí, se procede de la siguiente manera:

i.) Se determina el mínimo denominador común de las fracciones dadas.

ii.) Se representa cada uno de los números racionales dados, por medio de una fracción cuyo denominador sea el número obtenido en (i).

iii.) Se procede como en Caso 1

■ Ejemplo 59

Escriba la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\dfrac{5}{6} + \dfrac{7}{15}$ b.) $\dfrac{18}{7} + \dfrac{-3}{2}$

Solución

a.) $\dfrac{5}{6} + \dfrac{7}{15}$

El mínimo denominador común de 6 y 5 es 30 por lo que:

$$\begin{aligned}
\frac{5}{6} + \frac{7}{15} &= \frac{5 \cdot 5}{6 \cdot 5} + \frac{7 \cdot 2}{15 \cdot 2} \\
&= \frac{25}{30} + \frac{14}{30} \\
&= \frac{25 + 14}{30} \\
&= \frac{39}{30} \\
&= \frac{39 \div 3}{30 \div 3} \\
&= \frac{13}{10}
\end{aligned}$$

es decir;

$$\frac{5}{6} + \frac{7}{15} = \frac{13}{10}$$

b.) $\dfrac{18}{7} + \dfrac{-3}{2}$

El mínimo denominador común de 7 y 2 es 14, por lo que:

$$\begin{aligned}
\frac{18}{7}+\frac{-3}{2} &= \frac{18\cdot 2}{7\cdot 2}+\frac{-3\cdot 7}{2\cdot 7}\\
&= \frac{36}{14}+\frac{-21}{14}\\
&= \frac{36+-21}{14}\\
&= \frac{36-21}{14}\\
&= \frac{15}{14}
\end{aligned}$$

es decir;

$$\frac{18}{7}+\frac{-3}{2} = \frac{15}{4}$$

Ejercicios 35

Escriba la fracción canónica correspondiente a:

1.) $\dfrac{2}{3}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{7}{9}$

2.) $\dfrac{7}{8}+\dfrac{11}{2}+\dfrac{-19}{6}+\dfrac{3}{4}$

3.) $5+\dfrac{3}{5}$

4.) $-1+\dfrac{7}{9}$

5.) $\dfrac{-4}{3}+\dfrac{-2}{7}$

6.) $\dfrac{5}{8}+\dfrac{-1}{8}+\dfrac{-5}{7}$

7.) $\dfrac{5}{12}+\dfrac{7}{8}+\dfrac{-5}{24}+\dfrac{-25}{6}$

8.) $\dfrac{-6}{13}+\dfrac{2}{13}+\dfrac{-11}{13}$

9.) $1+\dfrac{9}{7}+\dfrac{-12}{14}$

10.) $\dfrac{5}{4}+-3+\dfrac{6}{5}+2$

Otro procedimiento que se puede usar para sumar dos o más números racionales lo aporta el siguiente teorema:

■ Teorema 4

Sean $\dfrac{a}{b}\in\mathbb{Q}$, $\dfrac{c}{d}\in\mathbb{Q}$ entonces:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$$

Prueba

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b}+\frac{c}{d} &= \frac{a\cdot d}{b\cdot d}+\frac{c\cdot b}{d\cdot b}\\
&= \frac{ad+cb}{b\cdot d}
\end{aligned}$$

es decir;

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{b \cdot d}$$

Ejemplo 60

Determine la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\dfrac{7}{6} + \dfrac{-3}{4}$ b.) $\dfrac{-3}{10} + \dfrac{-11}{6}$ c.) $\dfrac{5}{8} + \dfrac{2}{7}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned}
\frac{7}{6} + \frac{-3}{4} &= \frac{7 \cdot 4 + (-3) \cdot 6}{6 \cdot 4} \\
&= \frac{28 + -18}{24} \\
&= \frac{28 - 18}{24} \\
&= \frac{10}{24} \\
&= \frac{10 \div 2}{24 \div 2} \\
&= \frac{5}{12}
\end{aligned}$$

b.)
$$\begin{aligned}
\frac{-3}{10} + \frac{-11}{6} &= \frac{(-3) \cdot 6 + (-11) \cdot 10}{10 \cdot 6} \\
&= \frac{-18 + -110}{60} \\
&= \frac{-128}{60} \\
&= \frac{-128 \div 4}{60 \div 4} \\
&= \frac{-32}{15}
\end{aligned}$$

c.)
$$\begin{aligned}
\frac{5}{8} + \frac{2}{7} &= \frac{5 \cdot 7 + 2 \cdot 8}{8 \cdot 7} \\
&= \frac{35 + 16}{56} \\
&= \frac{51}{56}
\end{aligned}$$

Nota

El procedimiento para sumar números racionales, dado en el teorema anterior se puede generalizar para más de dos sumandos, pero para estos casos se recomienda utilizar, el procedimiento enunciado en el Caso 2.

1.9.2 Sustración de números racionales

Recordemos que si $p \in \mathbb{R}$ y $q \in \mathbb{R}$ entonces $p - q = p + (-q)$.

En particular si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ entonces: $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d}$

Ejemplo 61

Escriba la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\frac{6}{7} - \frac{3}{4}$ b.) $\frac{5}{6} - \frac{2}{6}$ c.) $\frac{3}{12} - \frac{5}{6} - \frac{7}{8}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned}
\frac{6}{7} - \frac{3}{4} &= \frac{6}{7} + \frac{-3}{4} \\
&= \frac{6 \cdot 4 + (-3) \cdot 7}{7 \cdot 4} \\
&= \frac{24 - 21}{28} \\
&= \frac{3}{28}
\end{aligned}$$

b.)
$$\begin{aligned}
\frac{5}{6} - \frac{2}{6} &= \frac{5}{6} + \frac{-2}{6} \\
&= \frac{5 + -2}{6} \\
&= \frac{5 - 2}{6} \\
&= \frac{3}{6} \\
&= \frac{3 \div 3}{6 \div 3} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\text{c.)}\ \frac{3}{12}-\frac{5}{6}-\frac{7}{8} = \frac{3}{12}+\frac{-5}{6}+\frac{-7}{8}$$
$$= \frac{3\cdot 2}{12\cdot 2}+\frac{-5\cdot 4}{6\cdot 4}+\frac{-7\cdot 3}{8\cdot 3}$$
$$= \frac{6}{24}+\frac{-20}{24}+\frac{-21}{24}$$
$$= \frac{6-20-21}{24}$$
$$= \frac{-35}{24}$$

(nota: aquí se usó que: $m.m.c.(12,6,8)=24$)

Ejercicios 36

Escriba la fracción canónica correspondiente a:

1.) $\frac{5}{2}-\frac{81}{2}$ 4.) $\frac{58}{9}-\frac{28}{9}+\frac{7}{5}$ 7.) $\frac{4}{38}-\frac{6}{19}+1$

2.) $\frac{3}{125}-\frac{4}{400}$ 5.) $\frac{11}{42}-\frac{5}{49}-\frac{6}{70}$ 8.) $4-\frac{7}{5}-\frac{1}{6}$

3.) $\frac{5}{8}-\frac{7}{4}+6$ 6.) $\frac{-1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$ 9.) $-3+\frac{7}{9}+4$

1.9.3 Algoritmo de la multiplicación de números racionales

Si $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ y $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$ entonces se tiene que:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

■ **Ejemplo 62**

Determine la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\frac{-3}{5}\cdot\frac{2}{7}$ b.) $2\cdot\frac{11}{9}$ c.) $\frac{-6}{4}\cdot\frac{-7}{9}$ d.) $\frac{-2}{3}\cdot\frac{1}{4}$

Solución

$$\text{a.)}\ \frac{-3}{5}\cdot\frac{2}{7} = \frac{-3\cdot 2}{5\cdot 7}$$
$$= \frac{-6}{35}$$

b.) $$2 \cdot \frac{11}{9} = \frac{2}{1} \cdot \frac{11}{9} = \frac{2 \cdot 11}{1 \cdot 9} = \frac{22}{9}$$

c.) $$\frac{-6}{4} \cdot \frac{-7}{9} = \frac{(-6) \cdot (-7)}{4 \cdot 9} = \frac{42}{36} = \frac{42 \div 6}{36 \div 6} = \frac{7}{6}$$

d.) $$\frac{-2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{(-2) \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{-2}{12} = \frac{-2 \div 2}{12 \div 2} = \frac{-1}{6}$$

En general:

Si $\frac{a_1}{b_1} \in \mathbb{Q}$, $\frac{a_2}{b_2} \in \mathbb{Q}$, ... , $\frac{a_n}{b_n} \in \mathbb{Q}$ entonces:

$$\frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{a_2}{b_2} \cdot \ ... \ \cdot \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_1 \cdot a_2 \cdot \ \cdots \ \cdot a_n}{b_1 \cdot b_2 \cdot \ \cdots \ \cdot b_n}$$

Ejemplo 63

Escriba la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\frac{-7}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot 2$ b.) $\frac{-2}{9} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2}$

Solución

$$\text{a.)}\ \frac{-7}{6}\cdot\frac{3}{5}\cdot 2 = \frac{-7\cdot 3\cdot 2}{6\cdot 5\cdot 1} = \frac{-42}{30} = \frac{-42\div 6}{30\div 6} = \frac{-7}{5}$$

$$\text{b.)}\ \frac{-2}{9}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2} = \frac{-2\cdot 1\cdot 3}{9\cdot 6\cdot 2} = \frac{-6}{108} = \frac{-6\div 6}{108\div 6} = \frac{-1}{18}$$

Ejercicios 37

Escriba la fracción canónica correspondiente a:

1.) $\frac{7}{8}\cdot\frac{16}{21}$

2.) $-4\cdot\frac{-14}{5}$

3.) $\frac{15}{7}\cdot\frac{-4}{6}$

4.) $\frac{6}{7}\cdot 8\cdot\frac{-7}{16}$

5.) $\frac{-9}{2}\cdot\frac{-11}{2}\cdot\frac{-4}{6}$

6.) $\frac{-3}{5}\cdot -15$

1.9.4 Algoritmo de la división de números racionales

Sean $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$ y $\frac{c}{d}\in\mathbb{Q}$ Entonces se cumple que:

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$

Ejemplo 64

Determine la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\frac{-3}{5}\div\frac{4}{3}$

b.) $\frac{-5}{4}\div -6$

c.) $3\div\frac{7}{6}$

Solución

a.) $$\begin{aligned} \frac{-3}{5} \div \frac{4}{3} &= \frac{-3 \cdot 3}{5 \cdot 4} \\ &= \frac{-9}{20} \end{aligned}$$

b.) $$\begin{aligned} \frac{-5}{4} \div -6 &= \frac{-5}{4} \div \frac{-6}{1} \\ &= \frac{-5 \cdot 1}{4 \cdot (-6)} \\ &= \frac{-5}{-24} \\ &= \frac{5}{24} \end{aligned}$$

c.) $$\begin{aligned} 3 \div \frac{7}{6} &= \frac{3}{1} \div \frac{7}{6} \\ &= \frac{3 \cdot 6}{1 \cdot 7} \\ &= \frac{18}{7} \end{aligned}$$

Recordemos que al inicio del folleto se mencionó que: Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, y $b \neq 0$ entonces:

$$a \div b = \frac{a}{b}$$

En particular si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, y $\frac{c}{d} \neq 0$ entonces:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \quad (1)$$

Además por el algoritmo de la división

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad (2)$$

Por lo que de (1) y (2) obtenemos que:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

■ **Ejemplo 65**

Determine la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\dfrac{\dfrac{-5}{4}}{\dfrac{7}{6}}$ b.) $\dfrac{3}{\dfrac{2}{7}}$ c.) $\dfrac{\dfrac{-13}{4}}{6}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned}\dfrac{\dfrac{-5}{4}}{\dfrac{7}{6}} &= \dfrac{-5\cdot 6}{4\cdot 7}\\ &= \dfrac{-30}{28}\\ &= \dfrac{-30\div 2}{28\div 2}\\ &= \dfrac{-15}{14}\end{aligned}$$

Así:

$$\dfrac{\dfrac{-5}{4}}{\dfrac{7}{6}} = \dfrac{-15}{14}$$

b.)
$$\begin{aligned}\dfrac{3}{\dfrac{2}{7}} &= \dfrac{\dfrac{3}{1}}{\dfrac{2}{7}}\\ &= \dfrac{3\cdot 7}{1\cdot 2}\\ &= \dfrac{21}{2}\end{aligned}$$

Así:

$$\dfrac{3}{\dfrac{2}{7}} = \dfrac{21}{2}$$

c.) $$\frac{\frac{-13}{4}}{6} = \frac{\frac{-13}{4}}{\frac{6}{1}} = \frac{-13\cdot 1}{4\cdot 6} = \frac{-13}{24}$$

Así:

$$\frac{\frac{-13}{4}}{6} = \frac{-13}{24}$$

Ejercicios 38

Escriba la fracción canónica correspondiente:

1.) $\dfrac{-2}{3} \div 4$

3.) $\dfrac{7}{9} \div \dfrac{-5}{4}$

5.) $\dfrac{3}{\frac{1}{2}}$

7.) $\dfrac{\frac{-7}{6}}{4}$

2.) $-6 \div \dfrac{-2}{3}$

4.) $\dfrac{6}{4} \div \dfrac{1}{5}$

6.) $\dfrac{-1}{\frac{5}{4}}$

8.) $\dfrac{\frac{-17}{3}}{2}$

1.9.5 Operaciones combinadas

Cuando una expresión involucra varias operaciones, con el fin de evitar ambigüedad, las operaciones deben realizarse con los siguientes convenios:

Convenio 1

En una expresión que no involucra paréntesis deben realizarse primero todas las multiplicaciones y divisiones, en orden, de izquierda a derecha. A continuación se realizan todas las adiciones y sustracciones de izquierda a derecha.

Convenio 2

En una expresión que involucra paréntesis deben realizarse primero las operaciones indicadas dentro del paréntesis.

■ **Ejemplo 66**

Determine la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{7}{9} - \dfrac{1}{36}$

b.) $\left[\dfrac{1}{5} + \dfrac{6}{5}\right] \div \dfrac{2}{3}$

c.) $\dfrac{1}{5} + \dfrac{6}{5} \div \dfrac{2}{3}$

d.) $\dfrac{-8}{5} \cdot \dfrac{3}{4} \div \dfrac{3}{10}$

e.) $\dfrac{7}{12} \div \dfrac{-14}{3} \div \dfrac{-5}{4}$

f.) $\dfrac{-5}{4} \div 2 \cdot \dfrac{8}{15} \div \dfrac{1}{3}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned} \frac{4}{3} \cdot \frac{7}{9} - \frac{1}{36} &= \frac{28}{27} - \frac{1}{36} \\ &= \frac{112-3}{108} \\ &= \frac{109}{108} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{4}{3} \cdot \frac{7}{9} - \frac{1}{36} = \frac{109}{108}$$

b.)
$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{5} + \frac{6}{5}\right] \div \frac{2}{3} &= \frac{1+6}{5} \div \frac{2}{3} \\ &= \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{21}{10} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left[\frac{1}{5} + \frac{6}{5}\right] \div \frac{2}{3} = \frac{21}{10}$$

c.)
$$\begin{aligned} \frac{1}{5} + \frac{6}{5} \div \frac{2}{3} &= \frac{1}{5} + \frac{6}{5} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{1} \\ &= \frac{1}{5} + \frac{9}{5} \\ &= \frac{1+9}{5} \\ &= \frac{10}{5} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{5} + \frac{6}{5} \div \frac{2}{3} = 2$$

d.) $$\begin{aligned} \frac{-8}{5}\cdot\frac{3}{4}\div\frac{3}{10} &= \frac{-2}{5}\cdot\frac{3}{1}\div\frac{3}{10} \\ &= \frac{-6}{5}\div\frac{3}{10} \\ &= \frac{-6}{5}\cdot\frac{10}{3} \\ &= \frac{-2}{1}\cdot\frac{2}{1} \\ &= -4 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{-8}{5}\cdot\frac{3}{4}\div\frac{3}{10} = -4$$

e.) $$\begin{aligned} \frac{7}{12}\div\frac{-14}{3}\div\frac{-5}{4} &= \frac{7}{12}\cdot\frac{3}{-14}\div\frac{-5}{4} \\ &= \frac{7}{12}\cdot\frac{-3}{14}\div\frac{-5}{4} \\ &= \frac{1}{4}\cdot\frac{-1}{2}\div\frac{-5}{4} \\ &= \frac{-1}{8}\div\frac{-5}{4} \\ &= \frac{-1}{8}\cdot\frac{4}{-5} \\ &= \frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{5} \\ &= \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{7}{12}\div\frac{-14}{3}\div\frac{-5}{4} = \frac{1}{10}$$

f.) $$\begin{aligned}
\frac{-5}{4}\div 2\cdot\frac{8}{15}\div\frac{1}{3} &= \frac{-5}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{15}\div\frac{1}{3}\\
&= \frac{-5}{8}\cdot\frac{8}{15}\div\frac{1}{3}\\
&= \frac{-1}{1}\cdot\frac{1}{3}\div\frac{1}{3}\\
&= \frac{-1}{3}\div\frac{1}{3}\\
&= \frac{-1}{3}\cdot\frac{3}{1}\\
&= \frac{-3}{3}\\
&= -1
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{-5}{4}\div 2\cdot\frac{8}{15}\div\frac{1}{3} = -1$$

Ejercicios 39

Determine la fracción canónica correspondiente a:

1.) $\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}\div\frac{3}{2}$

2.) $\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right]\div\frac{1}{6}$

3.) $\left[4-\frac{1}{3}\right]\div\frac{11}{6}$

4.) $\frac{5}{6}\div\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}$

5.) $2\cdot\frac{3}{5}+\frac{3}{2}\cdot 4-1$

6.) $\frac{5}{6}\div\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{5}\right]$

7.) $\left[7+\frac{25}{8}\right]\div\left[14+\frac{25}{4}\right]$

8.) $\left[60-\frac{1}{8}\right]\div\left[30-\frac{1}{16}\right]$

9.) $2\cdot\frac{3}{5}-4\cdot 3+2\div(3-5)$

Ejemplo 67

Determine la fracción canónica correspondiente a: $1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-1+\frac{2}{5}\left(-10+\frac{15}{4}\right)-1\right]\right\}$

Solución

$$\begin{aligned}
1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-1+\frac{2}{5}\left(-10+\frac{15}{4}\right)-1\right]\right\} &= 1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-1+\frac{2}{5}\left(\frac{-40+15}{4}\right)-1\right]\right\}\\
&= 1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-1+\frac{2}{5}\left(\frac{-25}{4}\right)-1\right]\right\}\\
&= 1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-1+\frac{1}{1}\left(\frac{-5}{2}\right)-1\right]\right\}\\
&= 1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{2-\left[\frac{3}{4}-1-\frac{5}{2}-1\right]\right\}\\
&= 1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{2-\left[\frac{3-4-10-4}{4}\right]\right\}\\
&= 1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{2-\left[\frac{-15}{4}\right]\right\}\\
&= 1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{2+\frac{15}{4}\right\}\\
&= 1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\left\{\frac{8+15}{4}\right\}\\
&= 1-\frac{8}{3}\cdot\frac{-3}{4}-\frac{23}{4}\\
&= 1+\frac{2}{1}-\frac{23}{4}\\
&= \frac{4+8-23}{4}\\
&= \frac{-11}{4}
\end{aligned}$$

■ **Ejemplo 68**

Determine la fracción canónica correspondiente a:

$$\frac{-18}{5}+6\cdot\left\{\frac{-5}{3}-\left[\frac{14}{3}-\left(\frac{7}{21}+\frac{14}{3}\right)\right]+\frac{1}{12}\right\}$$

Solución

$$
\begin{aligned}
\frac{-18}{5}+6\cdot\left\{\frac{-5}{3}-\left[\frac{14}{3}-\left(\frac{7}{21}+\frac{14}{3}\right)\right]+\frac{1}{12}\right\} &= \frac{-18}{5}+6\cdot\left\{\frac{-5}{3}-\left[\frac{14}{3}-\left(\frac{1}{3}+\frac{14}{3}\right)\right]+\frac{1}{12}\right\}\\
&= \frac{-18}{5}+6\cdot\left\{\frac{-5}{3}-\left[\frac{14}{3}-\frac{15}{3}\right]+\frac{1}{12}\right\}\\
&= \frac{-18}{5}+6\cdot\left\{\frac{-5}{3}-\left[\frac{-1}{3}\right]+\frac{1}{12}\right\}\\
&= \frac{-18}{5}+6\cdot\left\{\frac{-5}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{12}\right\}\\
&= \frac{-18}{5}+6\cdot\left\{\frac{-20+4+1}{12}\right\}\\
&= \frac{-18}{5}+6\cdot\left\{\frac{-15}{12}\right\}\\
&= \frac{-18}{5}+6\cdot\left\{\frac{-5}{4}\right\}\\
&= \frac{-18}{5}-\frac{30}{4}\\
&= \frac{-72-150}{20}\\
&= \frac{-222}{20}\\
&= \frac{-111}{10}
\end{aligned}
$$

■ **Ejemplo 69**

Determine la fracción canónica correspondiente a:

a.) $\dfrac{\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}}{8}$ b.) $\dfrac{\dfrac{2}{5}}{\dfrac{2}{3}-\dfrac{5}{6}}$

Solución

$$\text{a.)}\quad \frac{\frac{1}{4}+\frac{1}{3}}{8} = \frac{\frac{3+4}{12}}{8}$$

$$= \frac{\frac{7}{12}}{8}$$

$$= \frac{7}{(12)(8)}$$

$$= \frac{7}{96}$$

$$\text{b.)}\quad \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{3}-\frac{5}{6}} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{4-5}{6}}$$

$$= \frac{\frac{2}{5}}{\frac{-1}{6}}$$

$$= \frac{(2)(6)}{(5)(-1)}$$

$$= \frac{12}{-5}$$

$$= \frac{-12}{5}$$

Ejemplo 70

Determine la fracción canónica correspondiente a:

$$\text{a.)}\quad \frac{\frac{1}{2}\div\frac{3}{4}\div\frac{3}{2}}{\left(1-\frac{1}{3}\right)\div\left(1-\frac{1}{5}\right)}$$

$$\text{b.)}\quad \frac{\frac{-3}{2}\cdot 2-3}{3-2\div\left(1+\frac{1}{4}\right)}$$

Solución

a.)
$$
\begin{aligned}
\frac{\dfrac{1}{2} \div \dfrac{3}{4} \div \dfrac{3}{2}}{\left(1 - \dfrac{1}{3}\right) \div \left(1 - \dfrac{1}{5}\right)} &= \frac{\left(\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{4}{3}\right) \div \dfrac{3}{2}}{\left(\dfrac{3-1}{3}\right) \div \left(\dfrac{5-1}{5}\right)} \\
&= \frac{\dfrac{1}{1} \cdot \dfrac{2}{3} \div \dfrac{3}{2}}{\dfrac{2}{3} \div \dfrac{4}{5}} \\
&= \frac{\dfrac{2}{3} \div \dfrac{3}{2}}{\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{4}} \\
&= \frac{\dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{2}{3}}{\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{5}{2}} \\
&= \frac{\dfrac{4}{9}}{\dfrac{5}{6}} \\
&= \frac{(4)(6)}{(9)(5)} \\
&= \frac{(4)(2)}{(3)(5)} \\
&= \frac{8}{15}
\end{aligned}
$$

b.)
$$\frac{\frac{-3}{2}\cdot 2-3}{3-2\div\left(1+\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{-3}{2}\cdot\frac{2}{1}-3}{3-2\div\left(\frac{4+1}{4}\right)}$$

$$= \frac{\frac{-3}{1}\cdot\frac{1}{1}-3}{3-2\div\left(\frac{5}{4}\right)}$$

$$= \frac{-3-3}{3-\frac{2}{1}\div\frac{5}{4}}$$

$$= \frac{-6}{3-\frac{2\cdot 4}{1\cdot 5}}$$

$$= \frac{-6}{3-\frac{8}{5}}$$

$$= \frac{-6}{\frac{15-8}{5}}$$

$$= \frac{-6}{\frac{7}{5}}$$

$$= \frac{\frac{-6}{1}}{\frac{7}{5}}$$

$$= \frac{-30}{7}$$

1.9.6 Potencias en el conjunto de los números reales

Los números reales que se representan cantidades muy grandes o bien cantidades muy pequeñas son de uso frecuente en campos como la Física, la Química y la Astronomía, por ejemplo:

1. La distancia de nuestra galaxia a la constelación Osa Mayor es de 24.230.000.000.000.000.000 km.

2. El diámetro del núcleo de un átomo de un núcleo de carbón es: $0,000000000006096$ cm.

Dado lo incómodo que resulta trabajar con estos números, cuando son representados en la forma anterior, es que la matemática proporcionó a dichas ciencias una notación que permitiera simplificar y agilizar los cálculos con números como los mencionados.

Definición 27

Sea $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Se define la enésima potencia de a y se denota a^n, como el número que viene dado por:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \ \cdot a}_{n \text{ veces a}}$$

O sea

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ \cdots \ \cdot a}_{n \text{ veces a}}$$

y se dice que la expresión a^n es una representación exponencial o notación exponencial de la enésima potencia de a.

Sea $a \in \mathbb{R}$. Se define:

i.) $a^1 = a$

ii.) $a^0 = 1$ con $a \neq 0$

y se dice que: $\begin{cases} a^1 \text{ es una notación exponencial de } a \\ a^0 \text{ es una notación exponencial de } 1 \end{cases}$

Ejemplo 71

a.) $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, o sea; $2^3 = 8$ y en este caso decimos que 2^3 es una notación exponencial de 8.

b.) $(-5)^4 = (-5)(-5)(-5)(-5) = 625$; o sea; $(-5)^4 = 625$ y este caso decimos que $(-5)^4$ es una notación exponencial de 625.

c.) $(14)^1 = 14$ (Por definición) y en este caso decimos que $(14)^1$ es una notación exponencial de 14.

d.) $(-8)^0 = 1$ (Por definición) y en este caso decimos que $(-8)^0$ es una notación exponencial de 1.

Ejercicios 40

Represente en notación exponencial, el número correspondiente a cada una de las siguientes expresiones:

1.) $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$	3.) $(-2)(-2)(-2)$	5.) 25
2.) -27	4.) 17	6.) 144

Definición 28

Sea $a \in \mathbb{R}$ $, n \in \mathbb{N}$ tales que $a^n \in \mathbb{R}$.

En la expresión a^n : $\begin{cases} \text{“}n\text{” recibe el nombre de exponente.} \\ \\ \text{“}a\text{” recibe el nombre de base.} \end{cases}$

Ejemplo 72

a.) En la expresión $\left(\dfrac{7}{5}\right)^2$, 2 es el exponente y $\dfrac{7}{5}$ es la base.

b.) En la expresión $\left(\dfrac{-11}{3}\right)^6$, 6 es el exponente y $\dfrac{-11}{3}$ es la base.

Ejercicios 41

Represente cada uno de los siguientes números en notación exponencial, de tal forma que la base sea un número primo.

1.) 49

2.) 128

3.) 343

4.) 1

5.) 29

6.) 625

1.9.7 Propiedades de las potencias

Considere los dos ejemplos siguientes:

a.) $2^3 \cdot 2^4 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^7$

b.) $\left(\dfrac{-1}{5}\right)^3 \cdot \left(\dfrac{-1}{5}\right) = \left[\left(\dfrac{-1}{5}\right) \cdot \left(\dfrac{-1}{5}\right) \cdot \left(\dfrac{-1}{5}\right)\right] \cdot \left(\dfrac{-1}{5}\right) = \dfrac{-1}{5} \cdot \dfrac{-1}{5} \cdot \dfrac{-1}{5} \cdot \dfrac{-1}{5} \cdot = \left(\dfrac{-1}{5}\right)^4$

Estos ejemplos son casos particulares de la siguiente propiedad.

Propiedad 1

Sean $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, si $a^m \in \mathbb{R}$, $a^n \in \mathbb{R}$ entonces

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Ejercicios 42

Usando la propiedad anterior determine el valor de k en cada uno de los siguientes casos para que la igualdad sea verdadera.

1.) $2^3 \cdot 2^7 = 2^k$

2.) $(-3)^2 \cdot (-3) = (-3)^k$

3.) $5^k \cdot 5^3 = 5^7$

4.) $7 \cdot 7^k = 7^1$

Considere los dos ejemplos siguientes:

a.)
$$\begin{aligned} (9^2)^3 &= 9^2 \cdot 9^2 \cdot 9^2 \\ &= (9 \cdot 9) \cdot (9 \cdot 9) \cdot (9 \cdot 9) \\ &= 9^6 \end{aligned}$$

b.)
$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{-2}{3}\right)^3\right]^2 &= \left(\frac{-2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)^3 \\ &= \left[\left(\frac{-2}{3}\right) \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)\right] \cdot \left[\left(\frac{-2}{3}\right) \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) \cdot \left(\frac{-2}{3}\right)\right] \\ &= \left(\frac{-2}{3}\right)^6 \end{aligned}$$

Los ejemplos anteriores ilustran la siguiente propiedad:

Propiedad 2

Sean $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ y si $a^m \in \mathbb{R}$ entonces:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Ejercicios 43

Usando la propiedad anterior determine el valor de k en cada uno de las siguientes casos para que la igualdad sea verdadera.

1.) $\left(5^2\right)^3 = 5^k$

2.) $\left(7^k\right)^4 = 7^{20}$

3.) $\left(13^2\right)^k = 13^{12}$

4.) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^4\right]^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^k$

■ Definición 29

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$; $m \in \mathbb{N}$ Se define a^{-m} de la manera siguiente:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

Ejemplo 73

a.) $3^{-2} = \dfrac{1}{3^2}$

c.) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-3} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^3}$

b.) $(-5)^{-11} = \dfrac{1}{(-5)^{11}}$

d.) $(-6)^{-1} = \dfrac{1}{(-6)^1}$

Ejercicios 44

Usando la propiedad anterior determine el valor (o valores) de k en cada uno de los siguientes casos para que la igualdad sea verdadera.

1.) $(-7)^{-3} = \dfrac{1}{k^3}$

3.) $k^{-3} = \dfrac{1}{6^3}$

2.) $\left(\dfrac{7}{5}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{7}{5}\right)^k}$

4.) $k^{-4} = \dfrac{1}{(-5)^4}$

Considere los dos ejemplos siguientes:

a.)
$$\begin{aligned} \frac{6^5}{6^3} &= \frac{6\cdot 6\cdot 6\cdot 6\cdot 6}{6\cdot 6\cdot 6} \\ &= 6\cdot 6 \\ &= 6^2 \end{aligned}$$

b.)
$$\begin{aligned} \frac{8^4}{8^7} &= \frac{8\cdot 8\cdot 8\cdot 8}{8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8\cdot 8} \\ &= \frac{1}{8\cdot 8\cdot 8} \\ &= \frac{1}{8^3} \\ &= 8^{-3} \end{aligned}$$

Los ejemplos anteriores ilustran la siguiente propiedad:

Propiedad 3

Si $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ entonces

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejercicios 45

Usando la propiedad anterior determine el valor de k en cada uno de las siguientes casos, para que la igualdad sea verdadera.

1.) $\dfrac{5^7}{5^4} = 5^k$

2.) $\dfrac{(-3)^4}{(-3)^6} = (-3)^k$

3.) $\dfrac{(4)^7}{(k)^5} = 4^2$

4.) $\dfrac{7^3}{7^5} = 7^k$

5.) $\dfrac{(11)^6}{(11)^k} = (11)^{-2}$

6.) $\dfrac{6^k}{6^5} = 6$

Considere los dos ejemplos siguientes:

a.) $$\begin{aligned}(3\cdot 5)^4 &= (3\cdot 5)\cdot(3\cdot 5)\cdot(3\cdot 5)\cdot(3\cdot 5)\\ &= (3\cdot 3\cdot 3\cdot 3)\cdot(5\cdot 5\cdot 5\cdot 5)\\ &= 3^4\cdot 5^4\end{aligned}$$

b.) $$\begin{aligned}(-2\cdot 6)^3 &= (-2\cdot 6)\cdot(-2\cdot 6)\cdot(-2\cdot 6)\\ &= [(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)]\cdot(6\cdot 6\cdot 6)\\ &= (-2)^3\cdot 6^3\end{aligned}$$

Los ejemplos anteriores ilustran la siguiente propiedad:

Propiedad 4

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in N$, si $a^n \in \mathbb{R}$, $b^n \in \mathbb{R}$ entonces

$$(a\cdot b)^n = a^n\cdot b^n$$

Ejercicios 46

Usando la propiedad anterior determine el valor de k en cada uno de las siguientes casos para que la igualdad sea verdadera.

1.) $(4\cdot 7)^3 = 4^k\cdot 7^3$

2.) $(6\cdot 9)^k = 6^5\cdot 9^5$

3.) $(8\cdot k)^4 = 8^4\cdot 7^4$

4.) $\left(\dfrac{2}{7}\cdot\dfrac{3}{5}\right)^7 = k^7\cdot\dfrac{3}{5}^7$

Considere los dos ejemplos siguientes:

$$
\begin{aligned}
\text{a.)}\ \left(\frac{5}{4}\right)^3 &= \frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}\\
&= \frac{5\cdot 5\cdot 5}{(4\cdot 4\cdot 4)}\\
&= \frac{5^3}{4^3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{b.)}\ \left(\frac{-9}{7}\right)^4 &= \left(\frac{-9}{7}\right)\cdot\left(\frac{-9}{7}\right)\cdot\left(\frac{-9}{7}\right)\cdot\left(\frac{-9}{7}\right)\\
&= \frac{(-9)\cdot(-9)\cdot(-9)\cdot(-9)}{7\cdot 7\cdot 7\cdot 7}\\
&= \frac{(-9)^4}{7^4}
\end{aligned}
$$

Los ejemplos anteriores ilustran la siguiente propiedad:

Propiedad 5

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\left[\frac{a}{b}\right]^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejercicios 47

Usando la propiedad anterior determine el valor de k en cada uno de las siguientes casos para que la igualdad sea verdadera.

1.) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^5 = \dfrac{2^5}{3^k}$

2.) $\left(\dfrac{-3}{4}\right)^k = \dfrac{-27}{64}$

3.) $\left(\dfrac{2}{k}\right)^3 = \dfrac{8}{125}$

4.) $\left(\dfrac{5}{2}\right)^6 = \dfrac{5^{2+k}}{64}$

Notación

Si $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ y $a^n \in \mathbb{R}$, entonces

$$-a^n = -(a^n)$$

Por ejemplo

$$
\begin{aligned}
\text{a.)}\ -5^3 &= -(5^3)\\
&= -(5\cdot 5\cdot 5)\\
&= -125
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned} \text{b.)}\ -2^6 &= -(2^6) \\ &= -(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2) \\ &= -64 \end{aligned}$$

Ejercicios 48

En cada uno de los siguientes casos, escriba en notación decimal el número que corresponde a m, para que la igualdad sea verdadera.

1.) $m = -7^2$	5.) $m = -(7)^2$
2.) $m = -3^4$	6.) $m = -(3)^4$
3.) $m = -2^5$	7.) $m = -(2)^5$
4.) $m = -4^3$	8.) $m = -(4)^3$

Observacion importante: Considere los siguientes ejemplos:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{a.)}\ -3^2 & = -(3^2) & = -(9) \\ \text{b.)}\ (-3)^2 & = (-3)(-3) & = 9 \end{array}\right\} \text{Caso I}$$

$$\left.\begin{array}{llll} \text{c.)}\ -2^5 & = -(2^5) & = -(2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2) & = -32 \\ \text{d.)}\ (-2)^5 & = (-2)(-2)(-2)(-2)(-2) & = -32 & \end{array}\right\} \text{Caso II}$$

En los ejemplos presentados anteriormente caso I y caso II podemos observar que en general, NO siempre se cumple que $-a^n = (-a)^n$.

Ejercicios 49

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $a^n \in \mathbb{R}$

1. ¿Qué condiciones debe cumplir n para que $-a^n$ sea igual a $(-a^n)$?
2. ¿Qué condiciones debe cumplir n para que $-a^n$ sea diferente a $(-a^n)$?

Observe cada una de las siguientes igualdades:

a.) $(-7)^2 = 49$	d.) $(-2)^6 = 64$
b.) $2^4 = 16$	e.) $\left(\dfrac{-1}{5}\right)^2 = \dfrac{1}{25}$
c.) $(-3)^4 = 81$	f.) $(-1)^{10} = 1$

Los ejemplos anteriores son casos particulares del siguiente resultado:

Si $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, n par y $a^n \in \mathbb{R}$ entonces $a^n \geq 0$

Así, si $a \in \mathbb{R}$ entonces $a^2 \geq 0$, $a^4 \geq 0$, $a^6 \geq 0$, ...

Ejemplo 74

Determine la fracción canónica correspondiente a cada una de las siguientes expresiones:

a.) $\dfrac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 2^4}{3^2 \cdot 2^7}$

b.) $\dfrac{3 + 2^{-1}}{5 \cdot 2^{-1}}$

c.) $\dfrac{-3^{-2}}{\left(1 + \dfrac{4}{3}\right)^2}$

d.) $\dfrac{-25^6 \cdot 14^{10} \cdot (-4)^0}{(-7)^{10} \cdot 10^{10}}$

e.) $\left[\dfrac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 4^2}{2^4 \cdot 3^2}\right]^2$

f.) $\dfrac{2^3 + 2^5 - \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-1}}{2^4 \cdot 3}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned}
\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 2^4}{3^2 \cdot 2^7} &= \frac{2^2 \cdot 2^4 \cdot 3^5}{2^7 \cdot 3^2} \\
&= \frac{2^6 \cdot 3^5}{2^7 \cdot 3^2} \\
&= \frac{2^6}{2^7} \cdot \frac{3^5}{3^2} \\
&= 2^{6-7} \cdot 3^{5-2} \\
&= 2^{-1} \cdot 3^3 \\
&= \frac{1}{2} \cdot 3^3 \\
&= \frac{1}{2} \cdot 27 \\
&= \frac{27}{2}
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 2^4}{3^2 \cdot 2^7} = \frac{27}{2}$$

b.) $$\begin{aligned}\frac{3+2^{-1}}{5\cdot 2^{-1}} &= \frac{3+\dfrac{1}{2}}{5\cdot\dfrac{1}{2}}\\ &= \frac{\dfrac{6+1}{2}}{\dfrac{5}{2}}\\ &= \frac{\dfrac{7}{2}}{\dfrac{5}{2}}\\ &= \frac{(7)\cdot(2)}{(2)\cdot(5)}\\ &= \frac{7}{5}\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{3+2^{-1}}{5\cdot 2^{-1}} = \frac{7}{5}$$

c.) $$\begin{aligned}\frac{-3^{-2}}{\left[1+\dfrac{4}{3}\right]^2} &= \frac{-3^{-2}}{\left[\dfrac{3+4}{3}\right]^2}\\ &= \frac{\dfrac{-1}{(3)^2}}{\left[\dfrac{7}{3}\right]^2}\\ &= \frac{\dfrac{-1}{9}}{\dfrac{7^2}{3^2}}\\ &= \frac{\dfrac{-1}{9}}{\dfrac{49}{9}}\\ &= \frac{(-1)(9)}{(9)(49)}\\ &= \frac{-1}{49}\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{-3^{-2}}{\left[1+\dfrac{4}{3}\right]^2} = \frac{-1}{49}$$

d.) $$\begin{aligned} \frac{-25^6 \cdot 14^{10} \cdot (-4)^0}{(-7)^{10} \cdot 10^{10}} &= \frac{-(25)^6 \cdot (2 \cdot 7)^{10} \cdot 1}{7^{10} \cdot (2 \cdot 5)^{10}} \\ &= \frac{-(5^2)^6 \cdot 2^{10} \cdot 7^{10}}{7^{10} \cdot 2^{10} \cdot 5^{10}} \\ &= \frac{-(5^{12}) \cdot 2^{10} \cdot 7^{10}}{5^{10} \cdot 2^{10} \cdot 7^{10}} \\ &= \frac{-(5^{12})}{5^{10}} \cdot \frac{2^{10}}{2^{10}} \cdot \frac{7^{10}}{7^{10}} \\ &= -(5^{12-10}) \cdot 2^{10-10} \cdot 7^{10-10} \\ &= -(5^2) \cdot 2^0 \cdot 7^0 \\ &= -(25) \cdot 1 \cdot 1 \\ &= -25 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{-25^6 \cdot 14^{10} \cdot (-4)^0}{(-7)^{10} \cdot 10^{10}} = -25$$

e.) $$\begin{aligned} \left[\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 4^2}{2^4 \cdot 3^2}\right]^2 &= \left[\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot (2^2)^2}{2^4 \cdot 3^2}\right]^2 \\ &= \left[\frac{2^2 \cdot 2^4 \cdot 3^5}{2^4 \cdot 3^2}\right]^2 \\ &= \left[\frac{2^6 \cdot 3^5}{2^4 \cdot 3^2}\right]^2 \\ &= \left[\frac{2^6}{2^4} \cdot \frac{3^5}{3^2}\right]^2 \\ &= \left[2^{6-4} \cdot 3^{5-2}\right]^2 \\ &= \left[2^2 \cdot 3^3\right]^2 \\ &= (2^2)^2 \cdot (3^3)^2 \\ &= 2^4 \cdot 3^6 \\ &= 11664 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\left[\frac{2^2 \cdot 3^5 \cdot 4^2}{2^4 \cdot 3^2}\right]^2 = 11664$$

$$\begin{aligned}
\text{f.)} \quad \frac{2^3 + 2^5 - \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-1}}{2^4 \cdot 3} &= \frac{2^3 + 2^5 - \dfrac{1}{\dfrac{1}{8}}}{2^4 \cdot 3} \\
&= \frac{2^3 + 2^5 - 8}{2^4 \cdot 3} \\
&= \frac{8 - 8 + 2^5}{2^4 \cdot 3} \\
&= \frac{2^5}{2^4 \cdot 3} \\
&= \frac{2^5}{2^4} \cdot \frac{1}{3} \\
&= 2^{5-4} \cdot \frac{1}{3} \\
&= 2 \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{2^3 + 2^5 - \left(\dfrac{1}{8}\right)^{-1}}{2^4 \cdot 3} = \frac{2}{3}$$

Ejercicios 50

Determine la fracción canónica correspondiente a cada una de las siguientes expresiones:

1.) $\dfrac{(3^4)^3 \cdot (3^2)^4}{(-3)^{15} \cdot 3^4}$

2.) $\dfrac{(-3)^7 \cdot 3^9}{(-3)^{15} \cdot 3^4}$

3.) $\dfrac{1 - 3^{-1} - 2 \cdot 3^{-2}}{3^{-1} + 3^{-2}}$

4.) $\dfrac{1 + 4^{-1} - 2 \cdot 4^{-2}}{6 \cdot 4^{-2} + 1 + 5 \cdot 4^{-1}}$

5.) $\dfrac{(2 - 3 \cdot 7)^{-1}}{5 + 3^{-1}}$

6.) $\dfrac{25^6 \cdot 14^{10}}{-7^{10} \cdot 10^{10}}$

7.) $\dfrac{35^{11} \cdot 49^4 \cdot (-12)^{-31}}{10^{12} \cdot 6^{30} \cdot (-14)^{20}}$

8.) $\dfrac{-3 \cdot 4^{-1} + 1 + 2 \cdot 4^{-2}}{4^{-1} - 2 \cdot 4^{-2}}$

9.) $\dfrac{2 + 7 \cdot 5^{-1} + 3 \cdot 5^{-2}}{2 + 3 \cdot 5^{-1} - 2 \cdot 5^{-2}}$

10.) $\dfrac{\dfrac{1}{2} + \left[\dfrac{3}{4}\right]^2}{\dfrac{-5^2}{4}}$

Teorema 5

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, entonces se cumple la siguiente igualdad:

$$\frac{a^{-n} \cdot c}{b^{-m} \cdot d} = \frac{b^m \cdot c}{a^n \cdot d}$$

Ejemplo 75

Determine la fracción canónica correspondiente a cada una de las siguientes expresiones:

a.) $\dfrac{6^{-5} \cdot 2^3}{3^{-4}}$ b.) $\dfrac{2^{-3} \cdot 14^{-2} \cdot 7^2}{2^{-5}}$ c.) $\dfrac{2^{-4} \cdot 3^{-1}}{10^{-3} \cdot 3^{-2} \cdot 5^4}$

Solución

a.) $$\begin{aligned} \frac{6^{-5} \cdot 2^3}{3^{-4}} &= \frac{3^4 \cdot 2^3}{6^5} \\ &= \frac{3^4 \cdot 2^3}{(2 \cdot 3)^5} \\ &= \frac{3^4 \cdot 2^3}{2^5 \cdot 3^5} \\ &= \frac{1}{2^{5-3} \cdot 3^{5-4}} \\ &= \frac{1}{2^2 \cdot 3^1} \\ &= \frac{1}{4 \cdot 3} \\ &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{6^{-5} \cdot 2^3}{3^{-4}} = \frac{1}{12}$$

b.) $$\begin{aligned} \frac{2^{-3} \cdot 14^{-2} \cdot 7^2}{2^{-5}} &= \frac{2^5 \cdot 7^2}{2^3 \cdot 14^2} \\ &= \frac{2^5 \cdot 7^2}{2^3 \cdot (2 \cdot 7)^2} \\ &= \frac{2^5 \cdot 7^2}{2^3 \cdot 2^2 \cdot 7^2} \\ &= \frac{2^5}{2^3 \cdot 2^2} \\ &= \frac{2^5}{2^5} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{2^{-3} \cdot 14^{-2} \cdot 7^2}{2^{-5}} = 1$$

c.) $$\begin{aligned}\frac{2^{-4}\cdot 3^{-1}}{10^{-3}\cdot 3^{-2}\cdot 5^{4}} &= \frac{10^{3}\cdot 3^{2}}{2^{4}\cdot 3^{1}\cdot 5^{4}}\\ &= \frac{(5\cdot 2)^{3}\cdot 3^{2}}{2^{4}\cdot 3\cdot 5^{4}}\\ &= \frac{5^{3}\cdot 2^{3}\cdot 3^{2}}{2^{4}\cdot 3\cdot 5^{4}}\\ &= \frac{3^{2-1}}{2^{4-3}\cdot 5^{4-3}}\\ &= \frac{3^{1}}{2^{1}\cdot 5^{1}}\\ &= \frac{3}{2\cdot 5}\\ &= \frac{3}{10}\end{aligned}$$

Por lo que:

$$\frac{2^{-4}\cdot 3^{-1}}{10^{-3}\cdot 3^{-2}\cdot 5^{4}} = \frac{3}{10}$$

Ejercicios 51

Determine la fracción canónica correspondiente a cada una de las siguientes expresiones:

1.) $\dfrac{4^{-3}\cdot 6^{2}}{2^{-8}\cdot 3^{2}}$

2.) $3-\dfrac{4^{-2}}{3^{-1}}$

3.) $\dfrac{10^{-2}\cdot 6^{-30}\cdot 35^{11}\cdot 49^{4}}{(-14)^{20}\cdot(-12)^{-31}}$

4.) $\dfrac{-6^{-3}\cdot 4^{3}}{2^{5}\cdot 3^{-2}}$

5.) $\dfrac{(-7)^{2}\cdot 3^{-5}}{(14)^{2}\cdot 3^{-4}}$

6.) $\dfrac{21^{27}\cdot(-35)^{14}\cdot 8^{9}}{(-45)^{-13}\cdot 14^{13}\cdot 12^{10}\cdot 27^{14}}$

7.) $\dfrac{10^{2}\cdot(-5)^{-2}\cdot(-2)^{-5}}{5\cdot(-3)^{0}}$

8.) $\dfrac{5}{2}+\dfrac{2\cdot 3^{-2}}{2^{-1}}$

1.9.8 Raíz enésima de un número real

Definición 30

Sea $a\in\mathbb{R},\ \ a\geq 0,\ \ n\in\mathbb{N},\ \ n>1$.

Se define a la raíz enésima de a y se denota $a^{1/n}$, como el número real positivo b que cumple la igualdad: $b^n = a$.

Simbólicamente tenemos:

$$a^{1/n} = b \iff b^n = a$$

Ejemplo 76

a.) $8^{\frac{1}{3}} = 2$ pues $2^3 = 8$; en este caso decimos que 2 es la raíz cúbica de 8

b.) $625^{\frac{1}{4}} = 5$ pues $5^4 = 625$; en este caso decimos que 5 es la raíz cuarta de 625

c.) $49^{\frac{1}{2}} = 7$ pues $7^2 = 49$; en este caso decimos que 7 es la raíz cuadrada de 49

Notación.

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$

La raíz enésima de a también se denota $\sqrt[n]{a}$ es decir:

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

Por ejemplo

a.) La raíz cúbica de 8 se puede denotar como $8^{\frac{1}{3}}$ ó $\sqrt[3]{8}$, es decir: $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8}$

b.) La raíz cuarta de 625 se puede denotar como $625^{\frac{1}{4}}$ ó $\sqrt[4]{625}$, es decir: $625^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{625}$

Así usando el hecho de que $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ La realción (1) se expresa así:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

Por ejemplo

a.) $\sqrt[2]{121} = 11$ pues $11^2 = 121$

b.) $\sqrt[5]{32} = 2$ pues $2^5 = 32$

c.) $\sqrt[3]{343} = 7$ pues $7^3 = 343$

■ **Definición 31**

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$

En la expresión $\sqrt[n]{a}$:
- "n" recibe el nombre de índice.
- "a" recibe el nombre de subradical.
- "$\sqrt{\ }$" es el símbolo de radical.

■ **Ejemplo 77**

a.) En $\sqrt[7]{29}$, 7 es el índice del radical y 29 es el subradical.

b.) En $\sqrt[5]{64}$, 5 es el índice del radical y 64 es el subradical.

c.) En $\sqrt[4]{81}$, 4 es el índice del radical y 81 es el subradical.

Propiedad 6

Sea $a \in \mathbb{R}, \ \ a \geq 0, \ \ n \in \mathbb{N}, \ \ n > 1$

Entonces se cumple que:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

Demostración:

1.) Demostraremos que $\sqrt[n]{a^n} = a$

Sea $x = a^n$, entonces, por definición $\sqrt[n]{x} = a$

Así:

$\sqrt[n]{a^n} = \sqrt[n]{x} = a$

O sea; $\sqrt[n]{a^n} = a$

2.) Demostraremos que $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Sea $x = \sqrt[n]{a}$, entonces, por definición $x^n = a$

Así:

$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = x^n = a$

O sea; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Observación

De los resultados anteriores se obtiene que:

Si $a \in \mathbb{R}, \ \ a \geq 0, \ \ n \in I\mathbb{N}, \ \ n > 1$ entonces:

$$\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$$

Ejemplo 78

Escriba en notación decimal la raíz cuarta de 81

Solución

Factoricemos 81

$$\begin{array}{l|l} 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

De aquí se tiene que $81 = 3^4$,
por lo que: $\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$,
es decir: la raíz cuarta de 81 es 3.

Ejemplo 79

Escriba en notación decimal la raíz sexta de 64

Solución

Factoricemos 64

$$\begin{array}{l|l} 64 & 2 \\ 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

De aquí se tiene que $64 = 2^6$,
por lo que: $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$,
es decir: la raíz sexta de 64 es 2.

Ejemplo 80

Escriba en notación decimal la raíz tercera de 125

Solución

Factoricemos 125

$$\begin{array}{l|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

De aquí se tiene que $125 = 5^3$,
por lo que: $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$,
es decir: la raíz tercera de 125 es 5.

Notación:

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, entonces $\sqrt[2]{a}$ se acostumbra escribir como $\sqrt{a}$, es decir, cuando el índice de un radical es 2, este se omite.

Teorema 6

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ entonces la raíz enésima de a es única.

Ejercicios 52

Escriba en notación decimal el número correspondiente a cada una de las siguientes expresiones:

1.) $\sqrt{(-5)^2}$ 2.) $\sqrt{5^2}$ 3.) $\sqrt{25}$

Hasta ahora hemos trabajado con radicales en donde el subradical es un número real positivo, la siguiente definición extiende el concepto de raíz enénesima, al caso en el que el subradical es un número real negativo, para esto, es necesario imponer algunas condiciones al indice del radical.

Definición 32

Sea $a \in \mathbb{R}$, $a < 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, n impar.

Se define la raíz enésima de a y se denota $a^{1/n}$, como el número real negativo b que cumple la igualdad $b^n = a$.

Simbólicamente tenemos:

$a^{1/n} = b \Longleftrightarrow b^n = a$ $\sqrt[n]{a} = b \Longleftrightarrow b^n = a$

Ejemplo 81

a.) $\sqrt[3]{-27} = -3$ pues $(-3)^3 = -27$

b.) $\sqrt[5]{-32} = -2$ pues $(-2)^5 = -32$

c.) $\sqrt[7]{-1} = -1$ pues $(-1)^7 = -1$

Observación importante: Si n es un número natural par entonces: La raíz enésima de un número real negativo NO está definida en el conjunto de los números reales.

Simbólicamente tenemos:

Sea $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $n > 1$, n par, si $a < 0$ entonces:

$$\sqrt[n]{a} \notin \mathbb{R}$$

Por ejemplo, $\sqrt{-16} \notin \mathbb{R}$

En efecto, supongamos que existe un número real b tal que: $\sqrt{-16} = b$, entonces debe cumplirse que $-16 = b^2$.

De aquí se observa que esta igualdad nunca es cierta pues: b^2 es positivo y -16 es negativo.

Por lo tanto: $\sqrt{-16} \notin \mathbb{R}$

En forma similar se puede demostrar que:

$\sqrt[4]{-8}$, $\sqrt[6]{-11}$, $\sqrt[10]{-135}$, $\sqrt[8]{-1000}, ...,$ no están definidas en el conjunto de los números reales.

Propiedad 7

Si $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, n impar, entonces se cumple que: $\sqrt[n]{-a}, \; = \; -\sqrt[n]{a}$

Ejemplo 82

Escriba en notación decimal el número correspondiente a $\sqrt[3]{-343}$

Solución

Por la propiedad anterior tenemos que:

$\sqrt[3]{-343} \; = \; -\sqrt[3]{343}$ y factorizando 343 tenemos:

$$\begin{array}{l|l} 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

De aquí se tiene que $343 = 7^3$,
y por lo tanto: $\sqrt[3]{-343} \; = \; -\sqrt[3]{343} \; = \; -\sqrt[3]{7^3} \; = \; -7$,
o sea;
$\sqrt[3]{-343} \; = \; -7$.

Ejemplo 83

Escriba en notación decimal el número correspondiente a $\sqrt[5]{-243}$

Solución

Por la propiedad anterior tenemos que:

$\sqrt[5]{-243} \; = \; -\sqrt[5]{243}$ y factorizando 243 tenemos:

$$\begin{array}{l|l} 243 & 3 \\ 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

De aquí se tiene que $243 = 3^5$,
y por lo tanto: $\sqrt[5]{-243} \; = \; -\sqrt[5]{243} \; = \; -\sqrt[5]{3^5} \; = \; -3$,
o sea;
$\sqrt[5]{-243} \; = \; -3$.

Sea $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, n par, se define la raíz enésima de a^n como el valor absoluto de a.

Simbólicamente tenemos: $\sqrt[n]{a^n} \; = \; |a|$; si n es par.

Por ejemplo

a.) $\sqrt[4]{(-3)^4} \;=\; |-3| \;=\; 3$ es decir; $\sqrt[4]{(-3)^4} \;=\; 3$

b.) $\sqrt[6]{3^6} \;=\; |3| \;=\; 3$ es decir; $\sqrt[6]{3^6} \;=\; 3$

c.) $\sqrt{(-1)^2} \;=\; |-1| \;=\; 1$ es decir; $\sqrt{(-1)^2} \;=\; 1$

Ejercicios 53

Escriba en notación decimal el número correspondiente a cada una de las siguientes expresiones:

1.) $\sqrt[3]{-125}$

2.) $\sqrt[4]{625}$

3.) $\sqrt{(-3)^2}$

4.) $\sqrt[7]{-128}$

5.) $\sqrt[7]{128}$

6.) $\sqrt[5]{(-7)^5}$

7.) $\sqrt{(-9)^2}$

8.) $\sqrt[3]{-27}$

9.) $\sqrt[6]{(-7)^6}$

Propiedad 8

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, tales que $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ representan números reales entonces se cumple que:

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

!Cuidado¡

No siempre se cumple que: $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Por ejemplo, observe que: $\sqrt{\dfrac{-4}{-1}} \neq \dfrac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-1}}$ pues $\sqrt{\dfrac{-4}{-1}}$ si está definida en $\mathbb{R}$

$$\sqrt{\frac{-4}{-1}} = \sqrt{4} = 2 \text{ es decir } \sqrt{\frac{-4}{-1}} = 2$$

pero $\sqrt{-4}$ y $\sqrt{-1}$ NO representan números reales.

■ **Ejemplo 84**

El número $\sqrt[3]{\dfrac{-32}{243}}$ puede ser representado por una fracción canónica, determine dicha fracción (use la propiedad anterior)

Solución

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{\frac{-32}{243}} &= \frac{\sqrt[5]{-32}}{\sqrt[5]{243}} \\
&= \frac{-\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{243}} \\
&= \frac{-\sqrt[5]{2^5}}{\sqrt[5]{3^5}} \\
&= \frac{-2}{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\sqrt[5]{\frac{-32}{243}} = \frac{-2}{3}$$

Ejercicios 54

Cada una de las expresiones siguientes representa a un número real, el cual puede ser representado por una fracción canónica, en cada caso determine la fracción canónica correspondiente (use la propiedad anterior)

1.) $\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}}$

2.) $\sqrt{\dfrac{25}{81}}$

3.) $\sqrt[3]{\dfrac{-125}{343}}$

4.) $\sqrt[5]{\dfrac{243}{3125}}$

Propiedad 9

Sea $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, tales que $\sqrt[n]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ representan números reales entonces se cumple que:

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

!Cuidado¡

No siempre se cumple que: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

Ejercicios 55

Escriba dos ejemplos para los cuales no se cumple la propiedad anterior, en cada caso justifique su respuesta.

■ **Ejemplo 85**

Haciendo uso de la propiedad anterior escriba en notación decimal el número correspondiente a $\sqrt{225}$.

Solución

Factorizando 225 tenemos:

225	3
75	3
25	5
5	5
1	

De aquí se tiene que $225 = 3^2 \cdot 5^2$,
y por lo tanto: $\sqrt{225} = \sqrt{3^2 \cdot 5^2} = \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5^2} = 3 \cdot 5 = 15$,
es decir;
$\sqrt{225} = 15$.

Ejemplo 86

Haciendo uso de la propiedad anterior escriba en notación decimal el número correspondiente a $\sqrt[3]{-216}$.

Solución

$\sqrt[3]{-216} = -\sqrt[3]{216}$; Factorizando 216 tenemos:

216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

De aquí se tiene que $216 = 2^3 \cdot 3^3$,
y por lo tanto: $\sqrt[3]{-216} = -\sqrt[3]{216} = -\sqrt[3]{2^3 \cdot 3^3} = -\sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{3^3} = -2 \cdot 3 = -6$,
es decir;
$\sqrt[3]{-216} = -\sqrt[3]{216} = -6$.

Ejercicios 56

Haciendo uso de la propiedad anterior escriba la notación decimal del número correspondiente a cada una de la siguientes expresiones:

1.) $\sqrt{441}$ 3.) $\sqrt[3]{-2744}$

2.) $\sqrt{1225}$ 4.) $\sqrt{1764}$

A continuación nuestro objetivo es definir lo que vamos a entender por potencias en el que el exponente es un número racional.

Definición 33

Sean $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $m > 1$, $n > 1$, tales que $\sqrt[m]{a}$ representa un número real, entonces se cumple que:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{n/m} \quad y \quad \left(\sqrt[m]{a}\right)^n = a^{n/m}$$

Ejemplo 87

a.) $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$ c.) $\left(\sqrt[6]{3}\right)^7 = 3^{\frac{7}{6}}$

b.) $\sqrt{4^3} = 4^{\frac{3}{2}}$ d.) $\left(\sqrt[5]{2}\right)^3 = 2^{\frac{3}{5}}$

1.9.9 Propiedades

Las propiedades enunciadas anteriormente para potencias en los cuales el exponente es un número entero, también son válidas para potencias en las cuales el exponente es un número racional; a saber:

1.) $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$		4.) $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$	
2.) $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}},\ a \neq 0$		5.) $(a \cdot b)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$	
3.) $a^{\frac{-m}{n}} = \dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}},\ a \neq 0$		6.) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}},\ b \neq 0$	

Ejemplo 88

Usando las propiedades de los radicales y las potencias con exponente racional, verifique cada una de las siguientes igualdades.

a.) $\sqrt{1296} = 36$ b.) $\sqrt[5]{\dfrac{2^{10}}{3^{15}}} = \dfrac{4}{27}$

Solución

a.) $\sqrt{1296}$

1296	2
648	2
324	2
162	2
81	3
27	3
9	3
3	3
1	

De aquí se tiene que $1296 = 2^4 \cdot 3^4$,
por lo que: $\sqrt{1296} = \sqrt{2^4 \cdot 3^4} = \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{3^4} = 2^{\frac{4}{2}} \cdot 3^{\frac{4}{2}} = 2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$,
es decir; $\sqrt{1296} = 36$.

b.)

$$\sqrt[5]{\frac{2^{10}}{3^{15}}} = \frac{\sqrt[5]{2^{10}}}{\sqrt[5]{3^{15}}} = \frac{2^{\frac{10}{5}}}{3^{\frac{15}{5}}} = \frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{27}$$

es decir;

$$\sqrt[5]{\frac{2^{10}}{3^{15}}} = \frac{4}{27}$$

Ejercicios 57

Usando las propiedades de los radicales y las potencias con exponentes racionales, verifique cada una de las siguientes igualdades.

1.) $\sqrt[3]{2^6 \cdot 3^9} = 108$

2.) $\sqrt[3]{2^9 \cdot 3^3 \cdot 5^3} = 120$

3.) $\sqrt[5]{\dfrac{7^{10} \cdot 11^5}{3^{15}}} = \dfrac{539}{27}$

4.) $\sqrt[9]{\dfrac{3^{18} \cdot 5^9}{4^9 \cdot 2^{27}}} = \dfrac{45}{32}$

Propiedad 10

Sean $a \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, tales que $\sqrt[n]{a}$ representa un número real, entonces:

$$c \cdot \sqrt[n]{a} + d \cdot \sqrt[n]{a} = (c+d)\sqrt[n]{a}$$

Esta propiedad es una consecuencia de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición en el conjunto de los números reales.

■ **Ejemplo 89**

Usando la propiedad anterior realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones:

a.) $-\sqrt{7} + 6\sqrt{7}$

b.) $2\sqrt[3]{6} - 4\sqrt[4]{6} + 5\sqrt[3]{-6} + \sqrt[4]{6}$

Solución

a.)
$$\begin{aligned} -\sqrt{7} + 6\sqrt{7} &= (-1)\sqrt{7} + 6\sqrt{7} \\ &= (-1+6)\sqrt{7} \\ &= 5\sqrt{7} \end{aligned}$$

o sea; $-\sqrt{7} + 6\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$

b.) $2\sqrt[3]{6} - 4\sqrt[4]{6} + 5\sqrt[3]{-6} + \sqrt[4]{6}$

$$= (2\sqrt[3]{6} + 5\sqrt[3]{-6}) + (-4\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{6})$$

$$= (2\sqrt[3]{6} - 5\sqrt[3]{6}) + (-4\sqrt[4]{6} + \sqrt[4]{6})$$

$$= (2-5)\sqrt[3]{6} + (-4+1)\sqrt[4]{6}$$

$= -3\sqrt[3]{6} \quad + \quad (-3)\sqrt[4]{6}$

$= -3\sqrt[3]{6} - 3\sqrt[4]{6} \qquad$ o sea

$$2\sqrt[3]{6} - 4\sqrt[4]{6} + 5\sqrt[3]{-6} + \sqrt[4]{6} = -3\sqrt[3]{6} - 3\sqrt[4]{6}$$

Teorema 7

Sean $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ tales que $\sqrt[n]{a}$ representa un número real, si existe b, $b > 0$, tal que $a = b^n \cdot c$ entonces: $\sqrt[n]{a} = b \cdot \sqrt[n]{c}$. Es decir como: $a = b^n \cdot c$ tenemos que:

$$\sqrt[n]{b^n \cdot c} = b \cdot \sqrt[n]{c}$$

y en tal caso decimos que el factor b fue extraído del radical.

Demostración

como $a = b^n \cdot c$ entonces

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} &= \sqrt[n]{b^n \cdot c} && \text{, por teorema} \\ &= \sqrt[n]{b^n} \cdot \sqrt[n]{c} && \text{, por teorema} \\ &= b \cdot \sqrt[n]{c} \end{aligned}$$

Ejemplo 90

a.) $\sqrt{5^2 \ 3} = \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$

b.) $\sqrt[3]{32} = \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^2} = \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$

c.) $\sqrt[5]{-64} = -\sqrt[5]{64} = -\sqrt[5]{2^6} = -\sqrt[5]{2^5 \cdot 2} = -(\sqrt[5]{2^5} \cdot \sqrt[5]{2}) = -2\sqrt[5]{2}$

d.) $\sqrt{360} = \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5 \cdot 2} = 2 \cdot 3\sqrt{10} = 6\sqrt{10}$

Definición 34

Se dice que el radical $\sqrt[n]{a}$ está expresado de su forma más simple si no es posible extraer del radical algún factor primo de a.

Ejemplo 91

Exprese en su forma más simple cada uno de los siguientes radicales:

a.) $\sqrt{72}$

b.) $\sqrt[3]{135}$

c.) $\sqrt[5]{-96}$

Solución

a.) $\sqrt{72}$

como $72 = 2^3 \cdot 3^2$

entonces:

$$\begin{aligned}
\sqrt{72} &= \sqrt{2^3 \cdot 3^2} \\
&= \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 2} \\
&= 2\sqrt{3^2 \cdot 2} \\
&= 2 \cdot 3\sqrt{2} \\
&= 6\sqrt{2}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$\sqrt{72} = 6\sqrt{2}$

Solución

b.) $\sqrt[3]{135}$

como $135 = 3^3 \cdot 5$

entonces:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{135} &= \sqrt[3]{3^3 \cdot 5} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{5}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$\sqrt[3]{135} = 3 \cdot \sqrt[3]{5}$

Solución

c.) $\sqrt[5]{-96}$

como $96 = 2^5 \cdot 3$

entonces:

$$\begin{aligned}
\sqrt[5]{-96} &= -\sqrt[5]{96} \\
&= -\sqrt[5]{2^5 \cdot 3} \\
&= -2\sqrt[5]{3}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$\sqrt[5]{-96} = -2\sqrt[5]{3}$

Ejercicios 58

Exprese los radicales involucrados en cada una de las siguientes expresiones en su forma más simple y realice las operaciones indicadas:

a.) $\sqrt{45} + \sqrt{80}$

b.) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$

c.) $\sqrt{18} - \sqrt{50}$

d.) $\frac{1}{4} \cdot \sqrt[3]{2^5 \cdot 3^4} + 2\sqrt[3]{2^8 \cdot 3} - \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^4}$

Solución

a.) $\sqrt{45} + \sqrt{80}$

Factorizando 45 y 80 tenemos que:

$45 = 3^2 \cdot 5$ y $80 = 2^4 \cdot 5$

Así:

$$\begin{aligned}
\sqrt{45} + \sqrt{80} &= \sqrt{3^2 \cdot 5} + \sqrt{2^4 \cdot 5} \\
&= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{5} + \sqrt{2^4} \cdot \sqrt{5} \\
&= 3 \cdot \sqrt{5} + 2^{\frac{4}{2}} \cdot \sqrt{5} \\
&= 3 \cdot \sqrt{5} + 2^2 \cdot \sqrt{5} \\
&= 3\sqrt{5} + 4\sqrt{5} \\
&= (3 + 4)\sqrt{5} \\
&= 7\sqrt{5}
\end{aligned}$$

es decir: $\sqrt{45} \; + \; \sqrt{80} \; = \; 7\sqrt{5}$

b.) $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16} + \sqrt[3]{128}$

Factotizando 54, 16 y 128 tenemos que:

$54 = 3^3 \cdot 2 \;\; ; \;\; 16 = 2^4 \quad \text{y} \quad 128 = 2^7$

Así

$$
\begin{aligned}
\sqrt[3]{54} \; - \; \sqrt[3]{16} \; + \; \sqrt[3]{128} \quad &= \quad \sqrt[3]{3^3 \cdot 2} \; - \; \sqrt[3]{2^3 \cdot 2} \; + \; \sqrt[3]{2^6 \cdot 2} \\
&= \sqrt[3]{3^3} \cdot \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^6} \cdot \sqrt[3]{2} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt[3]{2} + 2^{\frac{6}{3}} \cdot \sqrt[3]{2} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt[3]{2} + 2^2 \cdot \sqrt[3]{2} \\
&= 3 \cdot \sqrt[3]{2} - 2 \cdot \sqrt[3]{2} + 4 \cdot \sqrt[3]{2} \\
&= (3 - 2 + 4) \; \sqrt[3]{2} \\
&= 5 \; \cdot \; \sqrt[3]{2}
\end{aligned}
$$

es decir:

$\sqrt[3]{54} \; - \; \sqrt[3]{16} \; + \; \sqrt[3]{128} \; = \; 5 \cdot \sqrt[3]{2}$

c.) $\sqrt{18} \; - \; \sqrt{50}$

Factorizando 18 y 20 tenemos que:

$18 = 3^2 \cdot 2 \quad \text{y} \quad 50 = 5^2 \cdot 2$

Así:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{18} \; - \; \sqrt{50} \quad &= \quad \sqrt{3^2 \cdot 2} \; - \; \sqrt{5^2 \cdot 2} \\
&= \sqrt{3^2} \cdot \sqrt{2} - \sqrt{5^2} \cdot \sqrt{2} \\
&= 3 \cdot \sqrt{2} \; - \; 5 \cdot \sqrt{2} \\
&= -2\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

es decir:

$\sqrt{18} \; - \; \sqrt{50} \; = \; -2\sqrt{2}$

$$
\begin{aligned}
d.)\ \frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{2^5\cdot 3^4}+2\sqrt[3]{2^8\cdot 3}-\sqrt[3]{2^6\cdot 3^4} &= \frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{2^3\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot 3}\ +\ \sqrt[3]{2^6\cdot 2^2\cdot 3}\ -\ \sqrt[3]{2^6\cdot 3^3\cdot 3}\\
&= \frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{2^3\cdot 3^3\cdot 2^2\cdot 3}\ +\ 2\sqrt[3]{2^6\cdot 2^2\cdot 3}\ -\ \sqrt[3]{2^6\cdot 3^3\cdot 3}\\
&= \frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{2^3}\cdot\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{2^2\cdot 3}+2\sqrt[3]{2^6}\cdot\sqrt[3]{2^2\cdot 3}-\sqrt[3]{2^6}\cdot\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}\\
&= \frac{1}{4}\cdot 2\cdot 3\cdot\sqrt[3]{4\cdot 3}+2\cdot 2^{\frac{6}{3}}\cdot\sqrt[3]{4\cdot 3}-2^{\frac{6}{3}}\cdot 3\sqrt[3]{3}\\
&= \frac{6}{4}\cdot\sqrt[3]{12}\ +\ 2\cdot 2^2\cdot\sqrt[3]{12}\ -\ 2^2\cdot 3\sqrt[3]{3}\\
&= \frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{12}\ +\ 8\sqrt[3]{12}\ -\ 12\sqrt[3]{3}\\
&= (\frac{3}{2}+8)\sqrt[3]{12}\ -\ 12\sqrt[3]{3}\\
&= \frac{19}{2}\sqrt[3]{12}\ -\ 12\sqrt[3]{3}
\end{aligned}
$$

es decir:

$$\frac{1}{4}\cdot\sqrt[3]{2^5\cdot 3^4}\ +\ 2\cdot\sqrt[3]{2^8\cdot 3}\ -\ \sqrt[3]{2^6\cdot 3^4}=\frac{19}{2}\cdot\sqrt[3]{12}\ -\ 12\sqrt[3]{3}$$

Ejercicios 59

Exprese los radicales involucrados en cada una de las siguientes expresiones en su forma más simple, y realice las operaciones indicadas:

1.) $\sqrt{108}\ -\ \sqrt{75}$

2.) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}\ +\ \sqrt[3]{54}$

3.) $5\sqrt[3]{81}\ -\ \sqrt[3]{56}\ +\ \sqrt[3]{192}$

4.) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{24}\ +\ \frac{1}{5}\sqrt[3]{375}\ +\ \frac{1}{7}\sqrt[3]{1029}$

5.) $3\sqrt[3]{40}\ +\ \sqrt[3]{135}\ -\ \sqrt[3]{625}$

6.) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{16}\ +\ \frac{2}{3}\sqrt[3]{54}\ -\ \frac{2}{5}\sqrt[3]{250}$

1.9.10 Productos de radicales de diferente índice

Considere los ejemplos *a.*) y *b.*) siguientes:

a.) De acuerdo a la notación usada, $\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}$

Pero además, por ampliación de fracciones se tiene que:

$\dfrac{1}{3} = \dfrac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}$; de aquí que

$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2}} = \sqrt[3 \cdot 2]{5^{1 \cdot 2}} = \sqrt[3 \cdot 2]{5^2}$; o sea que $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3 \cdot 2]{5^2}$

b.) Por notación de páginas (96-97), $\sqrt[4]{7} = 7^{\frac{1}{4}}$

Pero además, por ampliación de fracciones se tiene que:

$\dfrac{1}{4} = \dfrac{1 \cdot 5}{4 \cdot 5}$; de aquí que

$\sqrt[4]{7} = 7^{\frac{1}{4}} = 7^{\frac{5}{4 \cdot 5}} = \sqrt[4 \cdot 5]{7^5}$, o sea que $\sqrt[4]{7} = \sqrt[4 \cdot 5]{7^5}$

Los ejemplos *a.*) y *b.*) anteriores son casos particulares de la siguiente propiedad:

■ **Teorema 8**

Si $a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N},\ n > 1,\ k > 1$; tales que $\sqrt[n]{a}$ representa un número real entonces:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot k]{a^k}$$

Demostración

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{a} &= a^{1/n} \\ &= a^{\frac{k}{nk}} \qquad , \text{pues } \tfrac{1}{n} = \tfrac{k}{nk} \\ &= \sqrt[n \cdot k]{a^k} \end{aligned}$$

Por lo tanto: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n \cdot k]{a^k}$

■ **Ejemplo 92**

Escriba el número representado por $\sqrt[7]{2}$, por medio de un radical de índice 21.

Solución

Por el teorema anterior:

$\sqrt[7]{2} = \sqrt[7 \cdot 3]{2^3} = \sqrt[21]{2^3} = \sqrt[21]{8}$ es decir: $\sqrt[7]{2} = \sqrt[21]{8}$

■ **Ejemplo 93**

Escriba el número representado por $\sqrt[6]{10}$, por medio de un radical de índice 24.

Solución

Por el teorema anterior:

$\sqrt[6]{10} = \sqrt[6\cdot 4]{10^4} = \sqrt[24]{10^4}$

es decir: $\sqrt[6]{10} = \sqrt[24]{10^4}$

Ejercicios 60

1.) Escriba el número representado por $\sqrt{7}$, por medio de un radical de índice 10.

2.) Escriba el número representado por $\sqrt[11]{2}$, por medio de un radical de índice 25.

3.) Escriba el número representado por $\sqrt[5]{3}$, por medio de un radical de índice 25.

Considere los dos ejemplos siguientes:

Ejemplo 94

Escriba los números representados por $\sqrt[4]{2}$ y $\sqrt[6]{5}$ por medio de un radical cuyo índice sea el mínimo múltiplo común de 4 y 6.

Solución

Como m.m.c (4,6)=12 entonces:

i.) $\sqrt[4]{2} = \sqrt[4\cdot 3]{2^3} = \sqrt[12]{8}$ *ii.)* $\sqrt[6]{5} = \sqrt[6\cdot 2]{5^2} = \sqrt[12]{25}$

es decir: $\sqrt[4]{2} = \sqrt[12]{8}$ y $\sqrt[6]{5} = \sqrt[12]{25}$

Ejemplo 95

Escriba los números representados por $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{4}$ y $\sqrt[6]{5}$

Por medio de radicales cuyo índice sea el mínimo común de 2, 5 y 6.

Solución

Como m.m.c $(2, 5, 6) = 30$ entonces:

$i.)$ $\sqrt{3} = \sqrt[2\cdot 15]{3^{15}} = \sqrt[30]{3^{15}}$; es decir $\sqrt{3} = \sqrt[30]{3^{15}}$

$ii.)$ $\sqrt[5]{4} = \sqrt[5\cdot 6]{4^{6}} = \sqrt[30]{4^{6}}$; es decir $\sqrt[5]{4} = \sqrt[30]{4^{6}}$

$iii.)$ $\sqrt[6]{5} = \sqrt[6\cdot 5]{5^{5}} = \sqrt[30]{5^{5}}$; es decir $\sqrt[6]{5} = \sqrt[30]{5^{5}}$

Ejercicios 61

a.) Escriba los números representados por $\sqrt[14]{5}$, $\sqrt[21]{2}$ por medio de radicales cuyo índice sea m.m.c. (14, 21)

b.) Escriba los números representados por $\sqrt[24]{7}$, $\sqrt[9]{3}$ y $\sqrt[18]{2}$ por medio de radicales cuyo índice sea m.m.c. (24, 9, 18)

c.) Escriba los números representados por $\sqrt[7]{5}$, $\sqrt[3]{2}$ y $\sqrt{3}$ por medio de radicales cuyo índice sea m.m.c. (7, 3, 2)

■ **Teorema 9**

Sean $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, sea m.m.c. $(m, n) = k$ y sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, tales que $\sqrt[m]{a}$ y $\sqrt[n]{b}$ representan números reales, entonces:

$$\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[k]{a^p \cdot b^r} \text{ ; donde } k = m \cdot p, \; k = r \cdot n$$

Demostración.

Si m.m.c. $(m, n) = k$ entonces existen p, r con $p \in \mathbb{N}$ y $r \in \mathbb{N}$ tales que:

$k = m \cdot p$ y $k = n \cdot r$, así pues

$$\begin{aligned} \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} &= \sqrt[m\cdot p]{a^p} \cdot \sqrt[m\cdot r]{b^r} \quad \text{, como } k = m \cdot p \text{ y } k = r \cdot n \\ &= \sqrt[k]{a^p} \cdot \sqrt[k]{b^r} \\ &= \sqrt[k]{a^p \cdot b^r} \end{aligned}$$

es decir: $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[k]{a^p \cdot b^r}$

■ **Ejemplo 96**

Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones y exprese el resultado en forma más simple:

a.) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2}$ *b.*) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[6]{32}$

Solución

a.) Como m.m.c. $(2,3) = 6$ entonces:

$$\begin{aligned} \sqrt{5} &= \sqrt[3]{2} \\ &= \sqrt[6]{5^3} \cdot \sqrt[6]{2^2} \\ &= \sqrt[6]{5^3 \cdot 2^2} \\ &= \sqrt[6]{125 \cdot 4} \\ &= \sqrt[6]{500} \end{aligned}$$

es decir: $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{500}$

b.) Como m.m.c. $(4,6) = 12$ entonces:

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[6]{32} &= \sqrt[12]{8^3} \cdot \sqrt[12]{32^2} \\ &= \sqrt[12]{(8)^3 \cdot (32)^2} \\ &= \sqrt[12]{(2^3)^3 \cdot (2^5)^2} \\ &= \sqrt[12]{2^9 \cdot 2^{10}} \\ &= \sqrt[12]{2^{19}} \\ &= \sqrt[12]{2^{12} \cdot 2^7} \\ &= 2 \cdot \sqrt[12]{2^7} \\ &= 2 \cdot \sqrt[12]{128} \end{aligned}$$

es decir: $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[6]{32} = 2 \cdot \sqrt[12]{128}$

Ejercicios 62

Realice las operaciones indicadas en cada una de las siguientes expresiones y exprese el resultado en su forma más simple:

1.) $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[3]{12}$ 2.) $\sqrt[7]{9} \cdot \sqrt[3]{36}$ 3.) $\sqrt[12]{13} \cdot \sqrt[4]{2}$

4.) $\sqrt[6]{3} \cdot \sqrt[3]{-5}$ 3.) $-\sqrt[3]{6} \cdot \sqrt[3]{36}$ 6.) $\sqrt[7]{6} \cdot \sqrt[5]{9}$

NBP ASESORIAS ACADÉMICAS

N.B.P Asesorías Académicas es un Centro de Asesoramiento cuyo objetivo principal es la formación académica integral de nuestros estudiantes, por medio de una serie de técnicas y métodos de aprendizaje que permiten al alumno resolver cualquier problema de una forma rápida y eficaz, te enseñamos a resolver cualquier problema aplicando el método lógico.

El Profesor Nelson Baptista se caracteriza por trabajar con grupos no mayores a 12 estudiantes, garantizando de esta manera una atención muchísimo más personalizada, permitiendo un mejor aprendizaje y atención del alumno. El Profe Nelson es uno de los pioneros de las Tecnologías de información y comunicación aplicadas a los cursos de nivelación-admisión de las distintas universidades del país.

El aval de nuestra actividad está fundamentado en el prestigio logrado durante más de 15 años, brindando responsabilidad seriedad y calidad profesional.

¿Qué Ofrecemos?

- **Personal Altamente Calificado.**
- **Teoría y Resolución de puro problema tipo examen.**
- **Atención personalizada, grupos exclusivos de 12 estudiantes.**
- **Evaluación Continua.**
- **Horas de Consulta.**

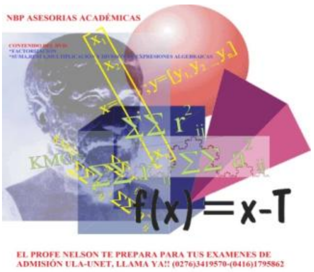
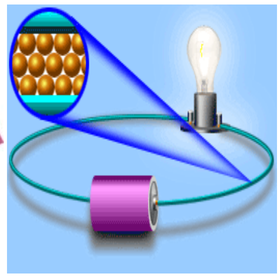
Te Preparamos Para:

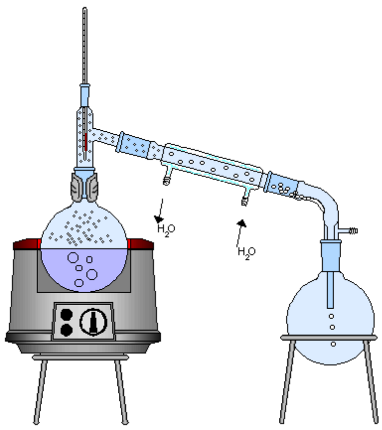
Examen de Admisión-Nivelación-Propedéutico

ULA-UNET-UCV-USB…


El profe Nelson te prepara para los exámenes de admisión ULA-UNET-USB

- ✓ **Curso de Preparación Para la prueba Psicológica**
- ✓ **Curso de Preparación Para la PINA(Prueba de Conocimientos Generales)**
- ✓ **Curso de Nivelación para el Propedéutico de la UNET y mucho más…**




Para una información más detallada de nuestros cursos, te invito a que visites nuestro blog en cualquiera de estos links (haz click sobre ellos):

Admisión ULA **Prueba Psicológica ULA** **Propedéutico UNET**

Contenido del DVD Multimedia Prueba Psicológica

Contenido del DVD Multimedia Prueba PINA

Puedes contactarnos por los siguientes medios:

1. Correo electrónico: examen.ula@gmail.com
2. Facebook
3. Vía Telefónica:

(0416)1795862 ; (0276)3419570